

# CVaR とローレンツ曲線、ポートフォリオ 最適化問題への応用

Research Report  
2016年4月

資産運用研究所  
シニア・アナリスト  
小又 雄一郎

## 要 約

CVaR (Conditional Value at Risk、期待ショートフォールとも呼ばれる) は、GPIF が基本ポートフォリオ変更の際に利用したことや、バーゼル銀行監督委員会が、バリュー・アット・リスクから期待ショートフォールへの移行を表明したことなどを踏まえると、今後より注目されると考えられる。

本稿では、はじめに、CVaR の定義と最近におけるその活用事例について解説し、その具体的な計算方法として、いくつか存在するものの中から、ローレンツ曲線を利用して計算する方法を紹介する。この計算方法は、CVaR の計算定義を別の視点で捉えただけに過ぎないのだが、リターン分布や信頼区間の違いにより CVaR がどのようなふるまいをするのかを視覚的に捉えることができるというメリットがある。

続いて、ローレンツ曲線を利用して計算する CVaR の応用として、伝統的 4 資産 (国内債券、国内株式、外国債券、外国株式) に対して、リターン分布としてヒストリカルデータを使用する方法 (ヒストリカル法) と正規分布を仮定した方法で、CVaR を最小化するポートフォリオ最適化問題を解く事例を紹介する。この事例の結果から、次の 2 点、「①期待リターンを「経済的中位 (実質ベース)」として正規分布を仮定した方法を利用して計算した最適化ポートフォリオの配分が、GPIF が 2014 年 10 月末に公開した基本ポートフォリオの配分と一致した」、「②ヒストリカル法を用いて計算したものは、GPIF の基本ポートフォリオに対し、国内株式はアンダーウェイト、外国債券はオーバーウェイト、国内債券、外国株式に関しては、GPIF の基本ポートフォリオに近い水準となった」、ということが分かった。

最後に、2 つの最適化手法で差異が生じた最大の要因は、それぞれの計算手法から得られる各資産の CVaR の水準の差に起因すると考えられるが、これをローレンツ曲線における「①最小値となる横軸の値」および「②曲線の最小値」を見ることで視覚的に把握できることを紹介する。これは、単に数値や分布関数の形状を見るだけでは得ることができない捉え方であり、ローレンツ曲線を活用するメリットの一例であるといえるだろう。

## 目次

1. はじめに
2. CVaR とローレンツ曲線
  - 2.1 CVaR の定義
  - 2.2 CVaR を巡る最近の事例
  - 2.3 ローレンツ曲線を利用した CVaR
3. CVaR 最小化による伝統的 4 資産のポートフォリオ最適化（応用例）
  - 3.1 最適化の手順
  - 3.2 最適化の結果
  - 3.3 ローレンツ曲線の形状比較
4. まとめ

## 1. はじめに

CVaR (Conditional Value at Risk) とは、ある確率(信頼区間、パーセント点)を上回るときの平均損失のことである。期待ショートフォール (Expected shortfall) とも呼ばれる。現在、規制上の所要自己資本を算出するために使用されている VaR は、テールリスクを捉えることができず、重大な市場ストレスの期間における資本充足を確保できない可能性があるという欠点が以前より指摘されていた。しかし、CVaR では、VaR では捉えていないある信頼区間を超えるリスクの大きさと期待損失額を考慮していることから、ストレス時に発生するテールリスクをより捉えることができる。

CVaR およびその活用については、CVaR によるアセットアロケーション最適化問題が Rockafellar, R.T. and S. Uryasev [2]をはじめとして数多く研究されているなど、決して新しい概念ではないが、年金積立金管理運用独立行政法人 (GPIF) が 2014 年 10 月 31 日に発表した、基本ポートフォリオ変更の際に CVaR を利用したこと ([3] [4])、2016 年 1 月 14 日にバーゼル銀行監督委員会が公開した「マーケット・リスクの最低所要自己資本」において、バリュー・アット・リスクから期待ショートフォール (CVaR と同様の概念) へのリスク計測手法の移行を表明したこと [8]などを踏まえると、CVaR の実務への応用は、今後より注目されていくだろう。

CVaR の具体的な計算方法は、基本的に VaR の計算方法と同様、ヒストリカル法、分散共分散法、モンテカルロ法などが一般的である。ヒストリカル法以外の手法では、対象となるリスク資産のリターンの確率密度関数に対して、何らかの仮定を置く必要がある点も VaR と共通している。しかし、VaR と大きく異なるのは、確率変数  $X$  とその確率密度関数の積を積分 (部分期待値を計算) することが必要である点である。そして、この積分をどう実行するかが CVaR 計算の上で重要であり、CVaR 計算の負荷が増加する要因にもつながっている。

しかし、本稿で紹介するローレンツ曲線を利用して CVaR を計算する方法 (Shalit, H. [1]) は、この積分実行による負荷をやや緩和できるかもしれない。

ローレンツ曲線とは、国全体の所得の格差の度合いを示す指標の一つ「ジニ係数」を算出する際に用いられるものであり、社会学では広く知られている。ローレンツ曲線を利用した計算方法は、CVaR の計算定義を別の視点で見ているだけに過ぎないのだが、リターン分布や信頼区間の違いにより CVaR がどのようなふるまいをするのかを視覚的に捉えることができるというメリットがある。

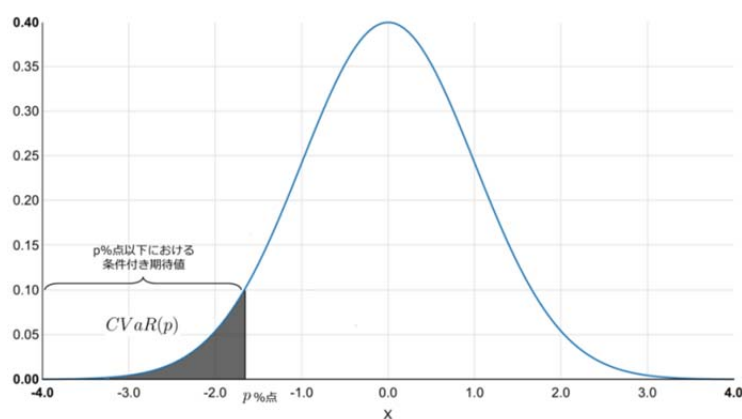
本稿では、ローレンツ曲線を利用して計算する CVaR の応用として、伝統的 4 資産（国内債券、国内株式、外国債券、外国株式）に対して、リターン分布としてヒストリカルデータを利用した方法（ヒストリカル法）と正規分布を仮定した方法のそれぞれで、CVaR を最小化するポートフォリオ最適化問題を解く事例を紹介し、その結果の差異の要因を、ローレンツ曲線を描くことにより考察する。

## 2. CVaR とローレンツ曲線

### 2.1 CVaR の定義

CVaR (Conditional Value at Risk、条件付き VaR) とは、ある確率水準(パーセント点)  $p$  を下回るときに平均損失のことである(図表 1)。期待ショートフォール (Expected shortfall) とも呼ばれる。VaR がある信頼水準における最大損失額を示しているのに対し、CVaR は信頼区間を超えるリスクの大きさと期待損失額を考慮しているのが大きく異なる点である。CVaR は、このような性質から、VaR では捉えられないとされるいわゆるテールリスクを捉えることのできる指標として期待されている。

図表 1 : CVaR の概念 (イメージ)



出所：日興リサーチセンター

### 2.2 CVaR を巡る最近の事例

CVaR やその活用については、CVaR によるアセットアロケーション最適化問題が Rockafellar, R.T. and S. Uryasev [2]をはじめとして既に多く研究されているなど、決して新しい話題ではないが、GPIF が 2014 年 10 月 31 日に発表した「基本ポートフォリオ変更」の際に CVaR を利用したこと ([3] [4])、

2016年1月14日にバーゼル銀行監督委員会が公開した「マーケット・リスクの最低所要自己資本」において、バリュー・アット・リスクから期待ショートフォール（CVaR と同様の概念）へのリスク計測手法の移行を表明したこと[8]等により、最近になってあらためて注目されつつある。

### 事例1：GPIFにおける基本ポートフォリオの策定

GPIFは、2014年10月の発表で、基本ポートフォリオ策定の際に利用するリスクとして、「目標運用利回りが賃金上昇率を下回る場合の平均的不足額」を採用したと表明した。この考え方はまさに CVaR の考え方に相当する。

#### 【GPIFにおける基本ポートフォリオ策定方法（抜粋）】

1. 国内債券のリターンは、フォワードルッキングなリスク分析を踏まえ、財政検証における足下からの長期金利推移シナリオに基づき計算された想定投資期間の平均収益率を使用。
2. 国内株式、外国債券、外国株式のリターンは、いずれも短期金利にリスクプレミアムを加えたものを使用。
3. 基礎となる実質短期金利は、「経済中位ケース」では財政検証との整合性を考慮し、過去の短期金利を基準として推計したもの、「市場基準ケース」では実質長期金利から長短スプレッドを差し引いたものを使用。
4. リスク値と相関係数は過去20年のデータを利用して推計したものを利用。
5. 制約条件は、「外国株式 $\geq$ 外国債券」「目標リターン $\geq$ 運用目標（名目賃金上昇率1.7%）」、「ウェイト合計=1」、「運用目標を下回る確率 $\leq$ 全額国内債券運用の場合に運用目標を下回る確率」
6. 各資産のウェイトは5%刻みで計算。
7. 以上の条件のもとで、CVaRを最小にするポートフォリオを選定。

出所：[3]、[4]より日興リサーチセンターが作成

図表2：GPIFの基本ポートフォリオ

	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	短期資産
変更前	60%	12%	11%	12%	5%
変更後	35%	25%	15%	25%	

出所：GPIF

### 事例2：バーゼル銀行監督委員会による期待ショートフォールへのリスク計測手法の移行表明

バーゼル銀行監督委員会<sup>1</sup>は、トレーディング勘定の資本賦課に係る抜本的見直しに対する過去3度の市中協議<sup>2</sup>を経て、2016年1月14日に、上位機関である中央銀行総裁・銀行監督当局長官グループが

<sup>1</sup> 国際金融危機の発生や拡大を防止し、金融システムの安定確保を図るため、各国の中央銀行、銀行監督当局や国際機関との連携・協力する目的により1974年に設置された国際機関。

<sup>2</sup> 最初の市中協議は2012年5月[5]、二度目の市中協議は2013年10月[6]、三度目の市中協議は2014年12月[7]に行われた。

合意したとおり、マーケット・リスクの最低所要自己資本の最終規則文書を公表したが、この中で「VaR から期待ショートフォール（Expected Shortfall, ES）への移行」を表明している。

バーゼル銀行監督委員会は、2007年から2008年にかけての深刻な市場ストレス環境を受けて、ストレス VaR の導入（バーゼル 2.5）を行ったが、依然 VaR には、以下のような弱点があると指摘していた。

#### 【VaR の弱点】

- a. トレーディング勘定における信用リスクを十分に捉えることができなかったこと。
- b. 銀行にテールリスクを取るインセンティブを与えたこと。
- c. 流動性リスクを捉えられなかったこと。
- d. 市場環境が異常時においても平常時の相関を想定していたため、ヘッジや分散効果によるリスク低減に対する認識が甘くなってしまったこと。

出所：“Explanatory note on the revised Minimum capital requirements for market risk”[8]より、日興リサーチセンターが作成

こうした VaR の弱点を解消するために、提案されたのが「期待ショートフォール」（CVaR と同じ概念）である。バーゼル銀行監督委員会は、「期待ショートフォール」の利点について、以下のように指摘している[8]。

#### 【期待ショートフォール(ES)の利点】

- a. ある信頼区間を超えるリスクの大きさおよび期待損失額を考慮することができ、VaR では計測できなかったテールリスクを捉えることができる。
- b. バーゼル 2.5 の方針に沿った形で、重大な市場ストレスの期間を計測することができる。
- c. 流動性リスク規制の枠組みにおいて、流動性ホライズン（ストレス環境下において、市場価格に影響を与えることなくリスク回避もしくはヘッジができるまでの時間）を変化させるというコンセプトを導入できる。

出所：“Explanatory note on the revised Minimum capital requirements for market risk”[8]より、日興リサーチセンターが作成

### 2.3 ローレンツ曲線を利用した CVaR

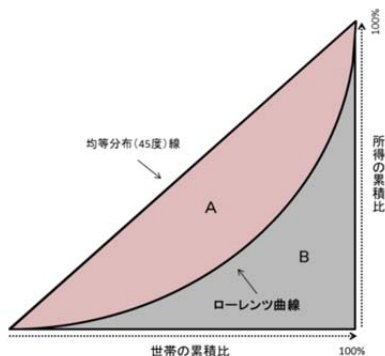
CVaR を計算する方法には、ヒストリカル法、リスク資産のリターン分布を仮定してそれを解析的ないし数値解析によって求める方法、モンテカルロシミュレーションによって求める方法などがある。

本稿では、Shalit.H[1]に基づき、ローレンツ曲線を利用して CVaR を計算する方法を紹介する。この計算方法は、CVaR の計算定義を別の視点で捉えただけに過ぎないのだが、リターン分布や信頼区間の違いにより CVaR がどのようなふるまいをするのかを視覚的に捉えることができるというメリットがあ

る。

ローレンツ曲線とは、国全体の所得の格差の度合いを示す指標の一つ「ジニ係数」を算出する際に用いられるものであり、世帯を所得の低い順番に並べ、横軸に世帯の累積比、縦軸に所得の累積比として作成される。そして、この曲線の形状を見て所得の配分の状況を把握することができる。

図表 3 : ローレンツ曲線とジニ係数 (イメージ)



ジニ係数は、 $A / (A + B)$  で定義される。

出所：日興リサーチセンター

このローレンツ曲線と CVaR との関係は、次のようにして理解することができる。

あるリスク資産の時系列データをリターンが低い順に昇順で並び替えたものを  $x_1 < x_2 < \dots < x_i$  とし、それらが発生する確率を  $q(x_i)$  とすると、このリスク資産のローレンツ曲線  $L(p)$  は、次式で表わされる。

$$L(p) = \sum_{i=1}^{k(p)} x_i q(x_i) \quad (1)$$

ここで、 $p$  は信頼区間を表す。また、 $k(p)$  は以下のように定義される値とする<sup>3</sup>。

$$p = \sum_{i=1}^{k(p)} q(x_i)$$

一方、CVaR は次のように書くことができる。

$$CVaR(p) = -\frac{1}{p} \sum_{i=1}^{k(p)} x_i q(x_i) \quad (2)$$

<sup>3</sup>本稿のように離散的データを扱う場合には、 $k(p)$ が整数となるような  $p$  を選ぶ。



ここにローレンツ曲線の定義を代入すると、CVaR は、

$$CVaR(p) = -\frac{L(p)}{p} \quad (3)$$

となり、これは点  $p$  におけるローレンツ曲線上の点  $L(p)$  と原点を結ぶ直線の傾きにマイナスを掛けた値となっている。

### 3. CVaR 最小化による伝統的 4 資産のポートフォリオ最適化（応用例）

ローレンツ曲線を利用して計算する CVaR の応用として、伝統的 4 資産（国内債券、国内株式、外国債券、外国株式）に対して、リターン分布としてヒストリカルデータを利用する方法（ヒストリカル法）と正規分布を仮定した方法のそれぞれで、CVaR を最小化するポートフォリオ最適化問題を解く事例を取り扱い、その結果を GPIF の基本ポートフォリオと比較してみたい。

#### 3.1 最適化の手順

ここでは、以下の条件、手法の下で最適化問題を解く。

- a. 伝統的 4 資産の期待リターンと目標リターンは、「年金積立金管理運用独立行政法人 中期計画の変更について（平成 26 年 10 月 31 日）」[3]（図表 5）に記載されている値を利用する。
- b. 最適化は、「経済的中位ケース（実質的なリターン）」、「市場基準ケース（実質的なリターン）」の 2 つの期待リターンを用いて、それぞれ行う。
- c. CVaR の計算は、「リターン分布がヒストリカルデータに従うと仮定した方法（ヒストリカル法）」と「（多重）正規分布を仮定する方法」の 2 通り計算する。
- d. 「ヒストリカル法」では、図表 4 の指数における、1996 年 1 月から 2015 年 12 月までの毎月の 12 ヶ月リターン（240 個の系列）を利用する<sup>4</sup>。
- e. ただし、伝統的 4 資産それぞれのリターンの平均値が、図表 5 の期待リターンと一致するようにリターン系列を平行移動（全リターン系列に対し、各資産のリターンの過去平均値を引き、期待リターンを足すという操作）をさせておく。なお、240 個のリターン系列の一つが発生する確率を  $1/240$  とする。
- f. 「正規分布を仮定する方法」では、図表 5 の期待リターンと相関行列を持つ多重正規分布関数を利用する。

<sup>4</sup> このリターン系列の相関行列は、国内債券・国内株式間を除き、GPIF が前提としている相関行列と近い値となる。

- g. CVaR の信頼区間 (p 点) は、目標リターンを下回る確率とする<sup>5</sup>。
- h. 「外国株式≧外国債券」「期待リターン≧目標リターン (名目賃金上昇率 1.7%<sup>6</sup>)」、「ウェイト合計 = 1」、「運用目標を下回る確率≦全額国内債券運用の場合に運用目標を下回る確率」という条件のもとで、式(3)より CVaR を計算し、CVaR を最小にするポートフォリオを選定する。
- i. 各資産のウェイトは 5%刻みで変化させる。

なお、上記のうち、a、b、g、h、i は、GPIF と共通している条件、手法であり、c、d、e、f は、GPIF の公開資料を基に本稿が独自で設定した条件、手法である。

図表 4：ヒストリカル法で利用する指数

国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
日興債券パフォーマンスインデックス	日興株式パフォーマンスインデックス	シティグループ世界国債インデックス (円建て円ヘッジなし)	MSCI 世界株式インデックス (円建て円ヘッジなし)

出所：日興リサーチセンター

図表 5：GPIF が前提としている期待リターンと資産間の相関行列

	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
実質的なリターン 経済的中位	-0.20%	3.20%	0.90%	3.60%
実質的なリターン 市場基準	-0.10%	3.10%	1.40%	4.10%

資産間の相関行列

	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
国内債券	1.00			
国内株式	-0.16	1.00		
外国債券	0.25	0.04	1.00	
外国株式	0.09	0.64	0.57	1.00

出所：GPIF 資料より、日興リサーチセンターが作成

<sup>5</sup> CVaR の計算では 5%タイル値が使われることが多いが、本稿では GPIF にならい、臨界値として、目標リターン = 賃金上昇率を利用した。

<sup>6</sup> GPIF によれば、運用目標は 1.7%だが、短期資産を 2%保有するとみなし、そのリターン減少分を逆算すると、経済中位ケースで 1.77%、市場基準ケースで 1.76%を確保することが必要とのことであるため、本稿でもこの値を用いた。[3]



### 3.2 最適化の結果

それぞれの最適化方法に基づき計算した最適ポートフォリオは、次のようになった。

図表 6：最適ポートフォリオの結果

期待リターン：経済的中位（実質的なリターン）

最適化方法	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	ヒストリカル法による CVaR	正規分布を仮定した CVaR
ヒストリカル法による CVaR を最小化	40.00%	40.00%	5.00%	15.00%	6.25%	8.64%
正規分布を仮定して計算した CVaR を最小化	35.00%	25.00%	15.00%	25.00%	7.18%	8.25%
参考： GPIF の基本ポートフォリオ	35.00%	25.00%	15.00%	25.00%	-	-

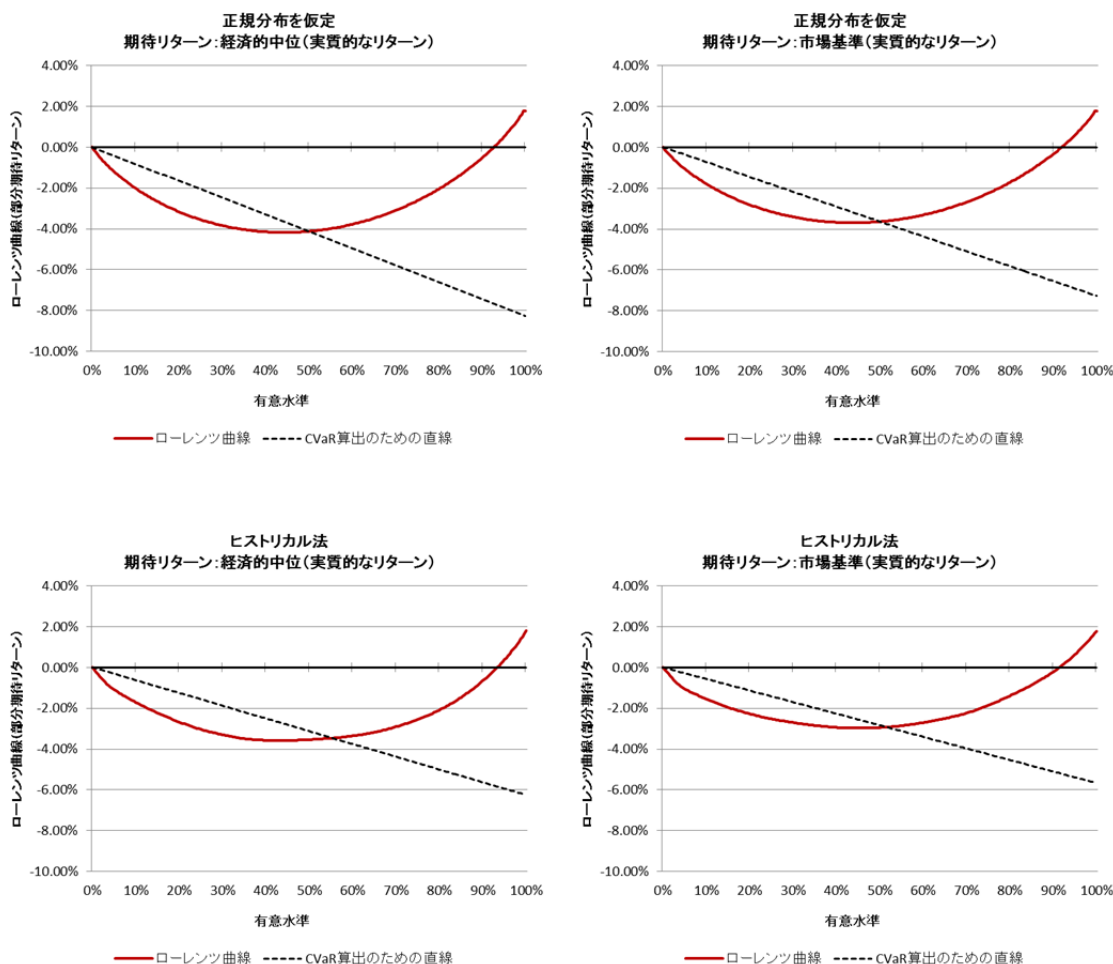
期待リターン：市場基準（実質的なリターン）

最適化方法	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	ヒストリカル法による CVaR	正規分布を仮定した CVaR
ヒストリカル法による CVaR を最小化	40.00%	10.00%	20.00%	30.00%	5.67%	7.49%
正規分布を仮定して計算した CVaR を最小化	40.00%	25.00%	15.00%	20.00%	6.08%	7.27%
参考： GPIF の基本ポートフォリオ	35.00%	25.00%	15.00%	25.00%	-	-

出所：各種市場データ、GPIF 資料より、日興リサーチセンターが作成

最適化ポートフォリオのローレンツ曲線は次のようになっている。

図表 7：最適化ポートフォリオのローレンツ曲線



出所：各種市場データ、GPIF 資料より、日興リサーチセンターが作成

結果を見ると、「経済的中位ケース（実質的なリターン）」では、正規分布を仮定した方法によって求めた最適化ポートフォリオにおける各資産へのウェイトが、GPIF の提示する基本ポートフォリオのものと完全に一致した。一方、ヒストリカル法による結果は、GPIF の基本ポートフォリオに対し、国内株式はオーバーウェイト、外国債券はアンダーウェイトとなった。

「市場基準ケース（実質的なリターン）」では、ヒストリカル法および正規分布を仮定した方法の結果ともに GPIF の基本ポートフォリオとは異なっていたが、正規分布を仮定した方法の方が比較的 GPIF の結果と近いものとなった。

このように、同じ資産でも CVaR の計算方法により差が出るが、その最大の理由は、CVaR の水準に違い（図表 8）があることに起因すると考えられる。

図表 8：伝統的 4 資産の CVaR の比較

期待リターン：経済的中位（実質的なリターン）

計算方法	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
ヒストリカル法	1.11%	13.57%	9.06%	15.46%
正規分布を仮定した方法	2.77%	17.49%	8.49%	19.09%

期待リターン：市場基準（実質的なリターン）

計算方法	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式
ヒストリカル法	1.06%	13.67%	8.65%	15.11%
正規分布を仮定した方法	2.70%	17.59%	8.32%	18.96%

出所：各種市場データ、GPIF 資料より、日興リサーチセンターが作成

以下では、CVaR がどのような要因で低くなってしまおうのかを、本稿で紹介したローレンツ曲線の形状から推測してみる。

はじめに、経済的中位ケース（実質的なリターン）において、ヒストリカル法と正規分布を仮定した方法の結果の違いの要因について考察してみたい。

まず、国内債券の CVaR は、ヒストリカル法（1.11%）に対し、正規分布を利用した方法（2.77%）が 2 倍以上の水準が大きくなっている（図表 8）。計算方法により 2 倍以上水準が異なるのは、この国内債券だけである。これが要因で、ヒストリカル法で計算した CVaR による最適化方法で求めたポートフォリオの国内債券比率が、正規分布を仮定して計算した CVaR による最適化方法で求めたものよりも高くなっていると考えられる。

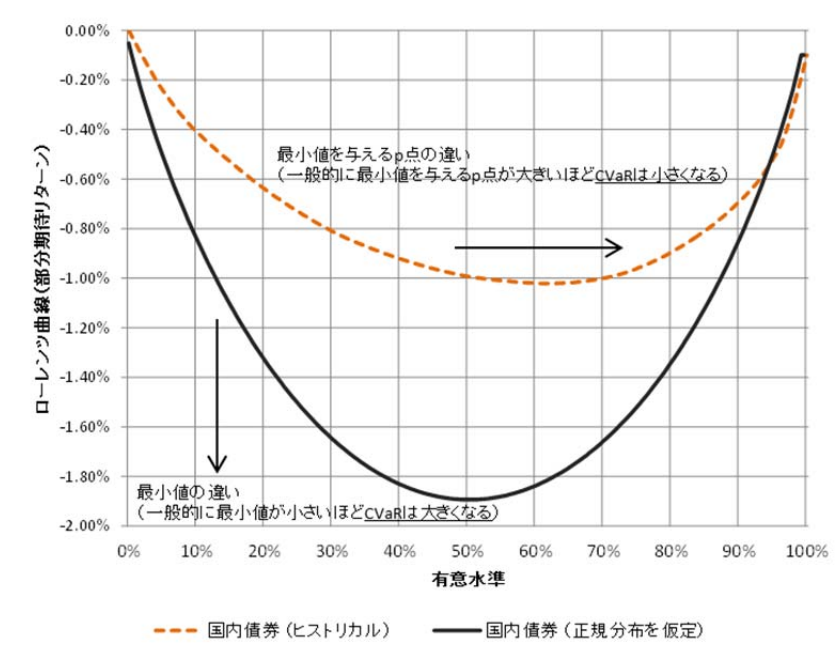
続いて、国内株式を見てみよう。国内株式の CVaR は、ヒストリカル法（13.57%）に対し、正規分布を利用した方法（17.49%）と大きな値になっており（図表 8）、国内債券同様に、ヒストリカル法で計算した CVaR による最適化方法で求めたポートフォリオの国内株式比率（40%）が、正規分布を仮定して計算した CVaR による最適化方法で求めたもの（25%）よりも高くなっている。

また、外国債券と外国株式については、ヒストリカル法では、正規分布を仮定した方法よりも国内債券と国内株式の CVaR が小さいため、これらの資産への投資比率が相対的に高まった結果、外国債券および外国株式の比率が低くなったと考えられる。

### 3.3 ローレンツ曲線の形状比較

CVaR の水準が異なることを、ローレンツ曲線の形状からより視覚的に把握してみよう。国内債券 100% の場合のローレンツ曲線は以下のようにになっている。

図表 9：国内債券 ローレンツ曲線の比較



出所：各種市場データ、GPIF 資料より、日興リサーチセンターが作成

図表 9 において、ヒストリカル法と正規分布を仮定した方法のローレンツ曲線を比較すると、「①最小値となる横軸の値：ヒストリカル法 > 正規分布を仮定した方法」および「②曲線の最小値：ヒストリカル法 > 正規分布を仮定した方法」となっていることがわかる。

今回の応用例で計算した CVaR の信頼区間 (p 点) は「目標リターン (1.7%) を下回る場合の期待損失額」で定義されることを踏まえると、「①最小値となる横軸の値」が 100% に近づくほど、信頼区間 (p 点) は、分布の形状によっては例外もあるが、双方のリターン分布の性質が極端に違わない限り、一般的には大きくなる傾向にある<sup>7</sup>。このことは、CVaR は、式 (3) で示した通り、信頼区間 (p 点) と形式的に反比例することからも理解できるだろう。

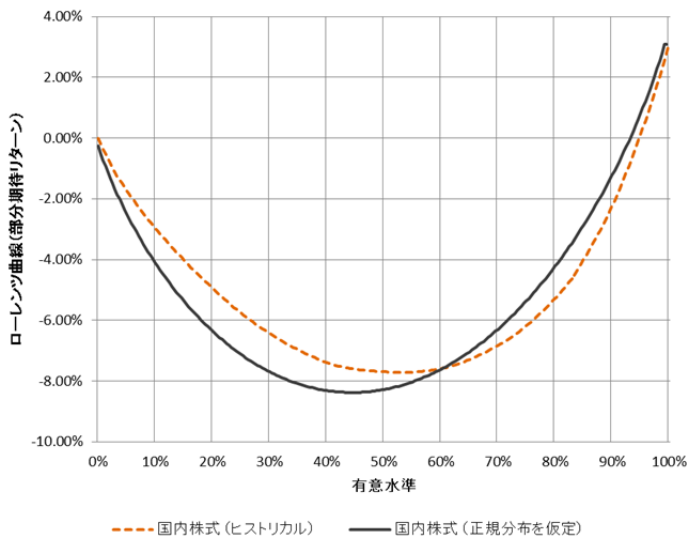
また、「②曲線の最小値」がより下方になるということは、この値は式 (3) の分子に相当するため、曲線の形状により例外はあるものの、一般的には CVaR が大きくなる傾向があることを示している。

以上のような原因の捉え方は、単に数値や分布関数の形状を見るだけでは得ることができない捉え方であり、ローレンツ曲線活用のメリットの一例である。

国内株式においても、ローレンツ曲線の形状から CVaR の値が異なっている具体的な要因を探ってみよう。

<sup>7</sup>少なくとも、「ローレンツ曲線の最小値および期待リターンが同程度」でかつ「ローレンツ曲線  $L(x)$  の最小点を与える点から信頼区間  $p$  までの間、 $L(x)$  の 1 次および 2 次微分係数が同程度」である限りにおいては、このように考えてよいだろう。

図表 10：国内株式 ローレンツ曲線の比較

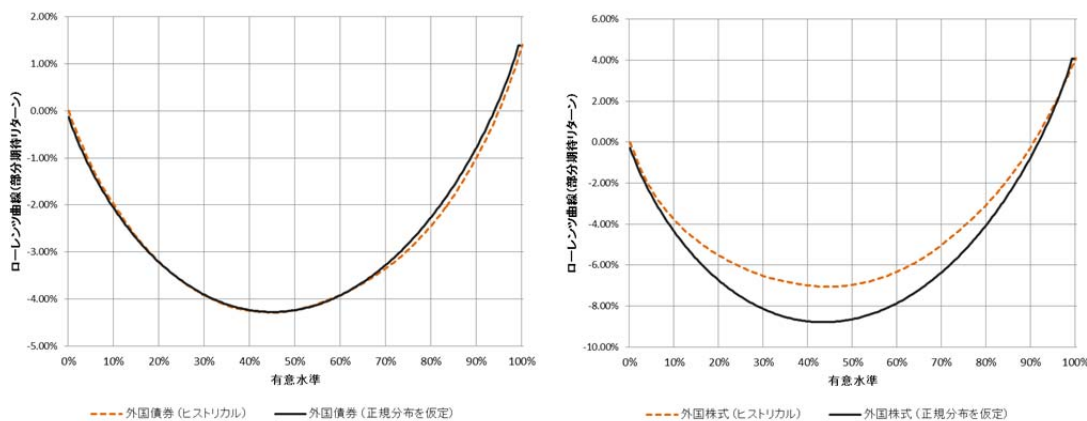


出所：各種市場データ、GPIF 資料より、日興リサーチセンターが作成

国内株式は、国内債券ほどではないが、「①最小値となる横軸の値：ヒストリカル法 > 正規分布を仮定した方法」および「②曲線の最小値：ヒストリカル法 > 正規分布を仮定した方法」となっている。したがって、国内債券と同様、ヒストリカル法による CVaR の方が、正規分布を仮定した方法による CVaR よりも小さい傾向にあると言える。

一方、外国債券と外国株式のローレンツ曲線は次のようになっている。

図表 11：外国債券、外国株式 ローレンツ曲線の比較



出所：各種市場データ、GPIF 資料より、日興リサーチセンターが作成

外国債券は、図表 11 を見るとほぼ曲線の形状が一致しているため、どちらの手法で計算しても CVaR はほぼ一致し、外国株式は、図表 11 を見ると、ヒストリカル法の方が、最小点を与える信頼区間 (p 点) がわずかに右側でありかつ最小値がわずかに上方にあるため、CVaR はやや小さくなった。

以上は、ローレンツ曲線を描写することで、分布や前提の違いが CVaR の結果にどう影響を与えるのかを把握しやすくなるという一例である。

なお、CVaR の差異に関する別の理由として、ヒストリカルデータから計算した相関と GPIF の前提としている相関の差によることも考えられるが、この影響は軽微であった。実際にヒストリカルの相関で正規分布を仮定した方法にて基本ポートフォリオを計算したが、結果は変わらなかった。

また、「経済的中位ケース（実質的なリターン）」、「市場基準ケース（実質的なリターン）」で、ヒストリカル法で結果が異なったのは、使用している期待リターンの差によって発生した、他方で「市場基準ケース（実質的なリターン）」を用いた場合でのヒストリカル法と正規分布を仮定した方法の差異は、「経済的中位ケース（実質的なリターン）」と同様に CVaR の差によって発生した、と考えてよいだろう。

#### 4. まとめ

本稿では、CVaR に関して、その定義と最近における活用事例について解説し、いくつか存在する計算方法のなかで、ローレンツ曲線を利用して計算する方法を紹介した。

CVaR は、決して新しい概念ではなく、下方リスクに対する耐性を測る上では有効なリスク指標のひとつに過ぎないが、GPIF が基本ポートフォリオ変更の際に CVaR を利用したことや、2016 年 1 月 14 日にバーゼル銀行監督委員会が「マーケット・リスクの最低所要自己資本」において、バリュー・アット・リスクから期待ショートフォール（CVaR と同様の概念）へのリスク計測手法の移行を表明したことなどを踏まえると、CVaR とその実務への応用は、今後より注目されるだろう。

本稿の後半部分では、ローレンツ曲線を利用して計算する CVaR の応用として、伝統的 4 資産（国内債券、国内株式、外国債券、外国株式）に対して、リターン分布がヒストリカルデータに従うと仮定した方法（ヒストリカル法）と正規分布を仮定した方法のそれぞれで、CVaR を最小化するポートフォリオ最適化問題を解く事例を紹介した。その結果、「正規分布を仮定した方法」を用いて計算した結果は、期待リターンを「経済的中位（実質ベース）」として計算した場合、GPIF の基本ポートフォリオにおける各資産のウェイトと完全に一致した。一方、「ヒストリカル法」を用いて計算した結果は、GPIF の基本ポートフォリオに比べて、国内債券および国内株式がオーバーウェイトであり、外国債券と外国株式はアンダーウェイトとなった。

差異が生じた要因は、各資産における「ヒストリカル法」と「正規分布を仮定した方法」による CVaR のローレンツ曲線の形状を比較することで、「①最小値となる横軸の値」および「②曲線の最小値」に起因する可能性があることがわかった。これは、単に数値や分布関数の形状を見るだけでは得ることができない捉え方であり、ローレンツ曲線活用のメリットの一例である。



## 参考文献

- [1] Shalit.H (2014), "Portfolio Risk Management Using the Lorenz Curve", The Journal of Portfolio Management 40: pp 152-159.
- [2] Rockafellar.R.T. and S.Uryasev (2000), "Optimization of Conditional Value-at-Risk", The Journal of Risk, Vol.2
- [3] 年金積立金管理運用独立行政法人（平成26年10月31日），「中期計画の変更について」の記者会見資料, [http://www.gpif.go.jp/topics/2014/pdf/1031\\_midterm\\_plan\\_henkou.pdf](http://www.gpif.go.jp/topics/2014/pdf/1031_midterm_plan_henkou.pdf)
- [4] 米澤康博（2015），「基本ポートフォリオ変更に関する解説」, 年金と経済 Vol.34 No.2
- [5] Basel Committee on Banking Supervision (2012), "Fundamental review of trading book capital requirements"  
, <http://www.bis.org/press/p120503.htm>
- [6] Basel Committee on Banking Supervision (2013), "Fundamental review of the trading book - second consultative document"  
, <http://www.bis.org/press/p131031.htm>
- [7] Basel Committee on Banking Supervision (2014), "Review of the trading book: consultative document on remaining issues", <http://www.bis.org/press/p141219.htm>
- [8] Basel Committee on Banking Supervision (2016), "Explanatory note on the revised Minimum capital requirements for market risk", <http://www.bis.org/bcbs/publ/d352.pdf>