

ペアトレード戦略におけるポジション構築 および解消手法の理論的導出に関する考察

Research Report
2015年3月23日

資産運用研究所
シニア・アナリスト
小又 雄一郎

要 約

本稿では、2014年12月24日にプレプリント・サーバーarXivにて公開された、NgoとPhamによるプレプリント論文“Optimal switching for pairs trading rule: a viscosity solutions approach” [1]のレビューを行うとともに、その日本市場における活用の可能性について考察する。まず、NgoとPhamらの手法に従い、ペアトレード戦略をHamilton-Jacobi-Bellman方程式による最適化問題として定式化し、その解の存在からポジション構築・解消を判断するしきい値がどのように導き出されるのかについて解説した後、そのしきい値を利用した独自の視点による複数のモンテカルロシミュレーションを行うことで、このペアトレード戦略の有効性を検証する。さらに、このペアトレード戦略から得られるリターンに関して、平均回帰性を特徴づけるパラメータや取引コスト率に対する依存性について詳しく検証し考察する。そして、それらの結果をもとに、このペアトレード戦略の応用可能性を考察していく。

本稿で紹介する手法は、実務へ応用するときの課題は多々あるものの、一旦ペア銘柄が決まってしまうと、その後は、厳密な数学の理論の帰結を利用することで、膨大なシミュレーションなどせずに売買タイミングを決定するしきい値が一意的かつ自動的に決まってしまうため、戦略アルゴリズム決定プロセスが大幅に短縮される可能性が非常に高い。これによって、非常に多くのペア銘柄による投資が可能となる、急な市場環境の変化にも柔軟に対応可能となるといった様々なメリットを享受することができると思われる。

目次

1. はじめに
2. プレプリント論文の帰結とその解釈、考察
 - 2.1 効用関数の定義と最適化問題の定式化
 - 2.2 論文における帰結
 - 2.3 各 switching region、しきい値の算出方法
 - 2.4 効用関数内のコストとリスク回避度について
3. モンテカルロシミュレーションによるサンプル
 - 3.1 シミュレーションの流れ
 - 3.2 単一のパラメータの組み合わせによるシミュレーション
 - 3.3 複数のパラメータの組み合わせによるシミュレーション
 - 3.4 シミュレーション結果のまとめ
4. 考察と課題
 - 4.1 当ペアトレード戦略のメリット
 - 4.2 実務へ応用するときの課題
5. まとめ

謝辞

参考文献

1. はじめに

ペアトレード戦略とは、一般的には、同じような値動きをする2つの銘柄のペアを選び、双方のリターンの差=スプレッドの水準に応じて、一方をロングポジションとし、もう一方をショートポジションとした投資を実行することにより、そのスプレッドがある水準に収斂していく性質=平均回帰性を利用することで、超過収益を狙う投資戦略のことである。

ペアトレード戦略を構築する上での最初の課題は、平均回帰性を持つペアをどのように見つけるかであるが、仮に何らかの方法で適切なペアが見つかったとしても、その次には、それらをどのようなタイミングで売買していけばよいのか、その投資ルール、アルゴリズムを決定しなければならないという課題が待ち構えている。

ペアトレードに関しては古くから数多くの研究が実証的及び理論的に行われており[2]、特に最近では確率過程からのアプローチによる研究がより多くなされている。具体的には、株価およびそのペアのスプレッドが従う確率過程を利用し、ペアトレード戦略から得られるリターンに関する効用関数を期間最適化するHJB方程式(Hamilton-Jacobi-Bellman方程式)を扱うことにより、最適な保有比率もしくはポジション構築・解消すべき最適なしきい値を決定するという手法である。

HJB 方程式を考えることで最適な投資比率を決定する手法については、Mudchanatongsuk, S., Primbs J. and W. Wong [3]や Tourin A. and R. Yan [4]の研究などがある。一方、同じく HJB 方程式を考えるが、最適な投資比率を決定するのではなく、その解の存在条件を議論することによって、ポジションの構築・解消をすべき最適なしきい値を求める方法が、Zhang and Zhang[5]、Kong[6]、Song and Zhang[7]、Leung and Li[8]らによって研究されている。

本稿では、後者の立場による研究、すなわち HJB 方程式を扱うことを通して、ポジションの構築・解消をすべき最適なしきい値を理論的に算出するという、2014年12月24日にプレプリント・サーバー arXiv¹にて公開された、Ngo と Pham によるプレプリント論文 "Optimal switching for pairs trading rule: a viscosity solutions approach" [1] (以下、プレプリント論文。)を紹介する。そして、そのプレプリント論文内で使用されている手法の、日本市場における活用の可能性について考察する。

Ngo と Pham[1]によれば、彼らの研究は Song and Zhang[7]らの研究をさらに進化させたものであり、より一般的な平均回帰性をもつ確率過程に拡張したこと、そして直接的に最適なカットオフ (しきい値) を算出する方法を見出したことを主張している。

図1: スプレッドの推移としきい値の例

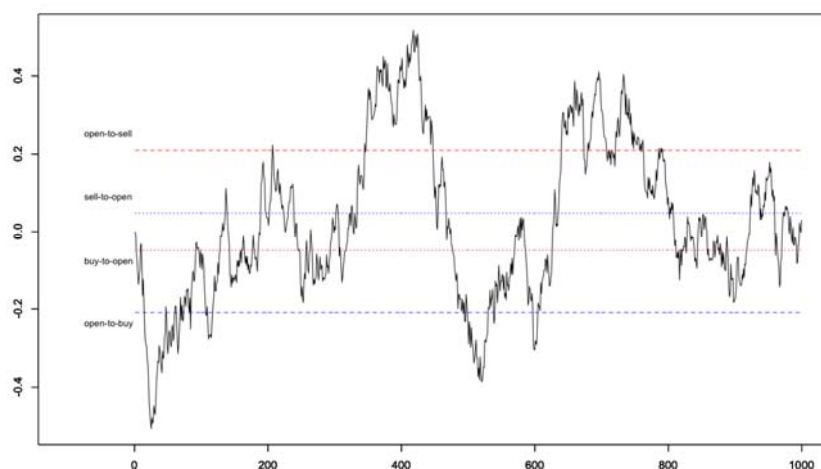


図1のチャートは、あるペア銘柄 A および B のスプレッド X の推移 ($X=A$ のリターン $-B$ のリターン) を表す。水平に引かれた4つの線は、上からそれぞれ、フラットポジション (なにも持たないポジション) から A をショートし B をロングするポジションに移行 (open-to-sell)、A をロングし B をショートしているポジションからフラットポジションに移行 (sell-to-open)、A をショートし B をロングしているポジションからフラットポジションに移行 (buy-to-open)、フラットポジションから A をロングし B をショートするポジションに移行 (open-to-buy) するしきい値を表している。

出所: 日興フィナンシャル・インテリジェンス

¹ arXiv とは、1991年から開始された、物理学をはじめとした数学から情報工学など数多くの学術論文が投稿される、世界最大の学術プレプリント投稿サイトである。分野によっては日々数十から数百もの投稿数になることもある。近年は、金融や経済学に関する投稿も増えてきている。

今回紹介するプレプリント論文においても、前述の指摘の通り、適切なペアを見つけるという点では同様の課題を持っているといえよう。しかし、一旦、その適切なペアが見つかってしまえば、その後の投資戦略は、膨大なシミュレーション等をしなくとも、厳密な数学の理論の帰結により、売買タイミングを決定するしきい値が一意的かつ自動的に決まってしまうことから、実証的手法及びモンテカルロシミュレーションを通して戦略を策定する方法と比べて、計算負荷の大幅な削減が期待される。

本稿で紹介するペアトレーディング戦略には、実務への応用のために乗り越えなければならない課題がまだまだ数多く存在するとはいえ、HJB方程式を取り扱うものの、最適投資比率を求めるのではなく、「投資のレシピ」を見出す、つまり、適切なしきい値の存在を導き、それに基づき将来の投資アルゴリズムを決定するという発想は、直感的にも理解しやすいため、実務への応用を容易に想像しやすく大変興味深い内容といえよう。

本稿では、第2章でNgoとPhamらが行った、スプレッドが従う確率過程の定義、具体的な効用関数を用いての最適化問題の定式化、その解の存在からどのようにしきい値が導き出されるのかについて解説した後、第3章でそのしきい値を利用した独自の視点による複数のモンテカルロシミュレーションを行い、このペアトレード戦略における各種パラメータ依存性を検証する。ただし、その際、プレプリント論文で議論されているような、しきい値や効用関数に対するパラメータ依存性ではなく、当戦略から得られるリターン、リスク、1パーセント点（下側から1%の値）、ポジション構築回数、ポジション構築期間といった、投資的により関心の高い指標に対するパラメータ依存性に着目する。そして、第4章でこれらのシミュレーション結果とそこから得られる各指標のパラメータ依存性を考慮することにより、当戦略が実務的にどの程度応用可能なのかを考察し、最後の第5章でまとめを述べる。

2. プレプリント論文の帰結とその解釈、考察

この章では、NgoとPhamらのプレプリント論文で展開されている、ポジションの構築・解消をすべき最適なしきい値の算出方法について要約する。

2.1 効用関数の定義と最適化問題の定式化

まず、AおよびBという銘柄ペアを考え、銘柄Aの累積リターンから銘柄Bの累積リターンを引いたものをスプレッド： X とする。以降、この銘柄AおよびBのうち、一方をロングしもう一方をロング銘柄と等金額でショートすることで、ペアトレード戦略を実行することを考える。

プレプリント論文に従い、各ポジションの状況を表す以下の"regime"を定義しておく。

- regime 1: ロングポジション - 銘柄Aをロングし、銘柄Bをショートしている状態。
- regime 0: フラットポジション - 銘柄A、銘柄Bともにポジションをもたない状態。
- regime -1: ショートポジション - 銘柄Aをショートし、銘柄Bをロングしている状態。

次に、スプレッド X に関する次式で表される平均回帰性を持つ確率過程を考える²。

$$dX_t = \mu(L - X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad (2.1)$$

ここで、 W は $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ 上の標準ブラウン運動に従う確率変数、 $\mu > 0$ 、 $L \geq 0$ は定数、標準偏差に相当する σ は (ℓ_-, ℓ_+) 上の、非縮退条件 $\sigma > 0$ を満たすリップシツ関数である。確率微分方程式 (2.1) は、任意の初期値 $X_0 = x \in (\ell_-, \ell_+)$ に対し一意の解を持つことが知られている。

続いて、次のような時間を含む効用関数を定義し、この効用関数の最適化問題を考える。

$$J(x, \alpha) = \mathbb{E} \left[\sum_{n \geq 1} e^{-\rho \tau_n} g(X_{\tau_n}^x, \alpha_{\tau_n^-}, \alpha_{\tau_n}) - \lambda \int_0^{\infty} e^{-\rho t} |\alpha_t| dt \right]. \quad (2.2)$$

それぞれの項の意味は以下のとおりである。

- x : スプレッドの初期値
- $\alpha = (\tau_n, l_n)_{n \geq 0}$: 時点 τ_n におけるポジション $l_n = -1, 0, 1$ の2変数で表される量(以下、switching control と呼ぶ)
- ρ : ディスカウントファクター
- α_n : $t = \tau_n$ における regime
- λ : リスク回避度

効用関数 (2.2) の第一項は、ペアトレード戦略を繰り返すことで得られる累積の利益を、第二項は、ポジションを持つことによるリスク（保有または在庫リスク）を現す。

効用関数内にある $g(x, i, j) = g_{ij}(x)$ (添字 (i, j) は各 regime を表す) は、それぞれ、以下のアクションを実行した時のキャッシュフロー関数=ゲイン関数:

- $g_{01}(x)$: ロングポジションを構築 (open-to-buy) した時のキャッシュフロー。
- $g_{-10}(x)$: ショートポジションを解消 (sell-to-open) した時のキャッシュフロー。
- $g_{0-1}(x)$: ショートポジションを構築 (open-to-sell) した時のキャッシュフロー。
- $g_{10}(x)$: ロングポジションを解消 (sell-to-open) した時のキャッシュフロー。

である。具体的には、

² 本稿では、以後、それぞれの数式内で用いられる記号になかで、特に重要と思われるもののみをピックアップして説明する。より詳細な記号の定義に関しては、プレプリント論文を参考にされたい。

$$g_{01}(x) = g_{-10}(x) = -(x + \varepsilon) \quad (2.3)$$

$$g_{0-1}(x) = g_{10}(x) = x - \varepsilon, \quad (2.4)$$

と定義される。 x はその時点でのスプレッド、 ε は取引コスト率を表している。

以上の定義を用いて、このペアトレード戦略における最適化問題を次のように定式化する。

$$v_i(x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_i} J(x, \alpha), \quad x \in (\ell_-, \infty), \quad i = 0, -1, 1, \quad (2.5)$$

ここで、 \mathcal{A}_i はswitching controlの集合であり、 i は α_0 の初期値への依存性を示す。(openポジションから開始する場合は0、buyポジションから開始する場合は1、sellポジションから開始する場合は-1。)

式(2.5)は、HJB方程式の要請およびregime間の遷移を考慮すると、次の3つの方程式を満たす必要がある。

$$\min [\rho v_0 - \mathcal{L}v_0, v_0 - \max(v_1 + g_{01}, v_{-1} + g_{0-1})] = 0, \quad \text{on } (\ell_-, \infty), \quad (2.6)$$

$$\min [\rho v_1 - \mathcal{L}v_1 + \lambda, v_1 - v_0 - g_{10}] = 0, \quad \text{on } (\ell_-, \infty), \quad (2.7)$$

$$\min [\rho v_{-1} - \mathcal{L}v_{-1} + \lambda, v_{-1} - v_0 - g_{-10}] = 0, \quad \text{on } (\ell_-, \infty). \quad (2.8)$$

ここで、 \mathcal{L} は、次式で表される確率過程(2.1)の生成演算子である。

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \mu(L - x)\varphi'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\varphi''(x). \quad (2.9)$$

2.2 論文における帰結

以下では、スプレッド X に関する確率過程として、式(2.10)であらわされるOrnstein-Uhlenbeck過程(O-U過程)のみを取り上げて説明する。

$$dX_t = -\mu X_t + \sigma dW_t \quad (2.10)$$

プレプリント論文では、式(2.6)から(2.8)の要請を利用して、次のような4つの"switching region"を構成する数 $\bar{x}_{01}, \bar{x}_{0-1}, \bar{x}_1, \bar{x}_{-1}$ が必ず存在し、

- buy-to-open region: $\mathcal{S}_1 = [\bar{x}_1, \infty)$
- open-to-sell region: $\mathcal{S}_{0-1} = [\bar{x}_{0-1}, \infty)$
- sell-to-open region: $\mathcal{S}_{-1} = (-\infty, -\bar{x}_{-1}]$
- open-to-buy region: $\mathcal{S}_{01} = (-\infty, -\bar{x}_{01}]$

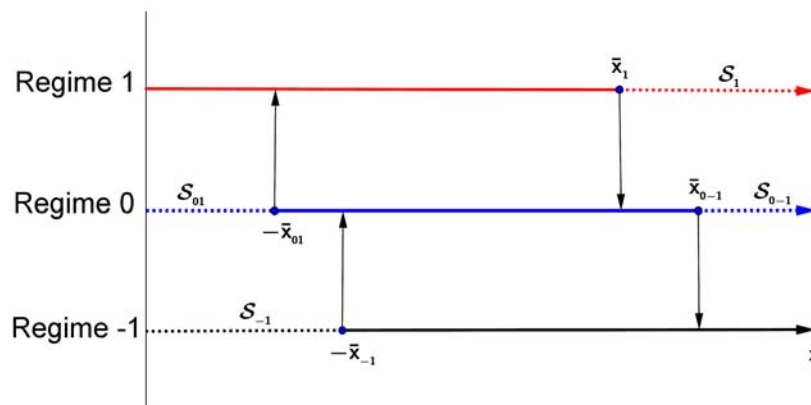
さらに、これらの4つの領域は、必ず以下を満たすことを示している。

$$S_{0-1} \subset S_1, S_{01} \subset S_{-1}. \tag{2.11}$$

この領域の意味は、その名称の通り、 X の値が buy-to-open region に存在する場合は buy のポジションを閉じる(openにする)、 X の値が open-to-sell に存在する場合は open から sell のポジションに移行するという意味である。sell-to-open、open-to-buy についても同様である。

この switching region を利用したトレーディング戦略のイメージを図示したものが図 2 である。

図 2：4 つの switching region とペアトレード戦略のアルゴリズム



出所: Ngo, M and Pham, H: "Optimal switching for pairs trading rule: a viscosity solutions approach" [1]

各領域に関する条件 (2.11) は、このようなロング・ショートポジションの構築・解消が現実的に可能であることを表している。この値域が必ず存在する、そしてそれらが一意に求まることこそ、この論文の最大の帰結である。

2. 3 各 switching region、しきい値の算出方法

次に各 switching region における、しきい値の算出方法について説明する。プレプリント論文では Theorem 4.1 で展開されている。

各 regime における最適化された効用関数 (2.5) は、以下の微分方程式：

$$\rho\phi - \mathcal{L}\phi = 0, \tag{2.12}$$

の基本解:

$$\psi_+(x) = \int_0^\infty t^{\mu-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2} + \frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma}xt\right)dt, \psi_-(x) = \int_0^\infty t^{\mu-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2} - \frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma}xt\right)dt, \tag{2.13}$$

を利用して、次のように与えられる。

$$v_0(x) = \begin{cases} A_1 \psi_+(x) - \frac{\lambda}{\rho} + g_{01}(x), & x \leq -\bar{x}_{01}, \\ A_0 \psi_+(x) + B_0 \psi_-(x), & -\bar{x}_{01} < x < \bar{x}_{0-1}, \\ B_{-1} \psi_-(x) - \frac{\lambda}{\rho} + g_{0-1}(x), & x \geq \bar{x}_{0-1}, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$v_1(x) = \begin{cases} A_1 \psi_+(x) - \frac{\lambda}{\rho}, & x < \bar{x}_1, \\ v_0(x) + g_{10}(x), & x \geq \bar{x}_1, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$v_{-1}(x) = \begin{cases} v_0(x) + g_{-10}(x), & x \leq -\bar{x}_{-1}, \\ B_{-1} \psi_-(x) - \frac{\lambda}{\rho}, & x > -\bar{x}_{-1}, \end{cases} \quad (2.16)$$

そして、(2.14) から (2.16) が、それぞれの regime の境界でなめらかに接続されるという、次の "smooth-fit conditions" を満たす条件を課すことにより、各定数 $A_0, B_0, A_1, B_{-1}, \bar{x}_{01}, \bar{x}_{0-1}, \bar{x}_1, \bar{x}_{-1}$ が決定される。

$$A_1 \psi_+(-\bar{x}_{01}) - \frac{\lambda}{\rho} + g_{01}(-\bar{x}_{01}) = A_0 \psi_+(-\bar{x}_{01}) + B_0 \psi_-(-\bar{x}_{01}) \quad (2.17)$$

$$A_1 \psi'_+(-\bar{x}_{01}) - 1 = A_0 \psi'_+(-\bar{x}_{01}) + B_0 \psi'_-(-\bar{x}_{01}) \quad (2.18)$$

$$B_{-1} \psi_-(\bar{x}_{0-1}) - \frac{\lambda}{\rho} + g_{0-1}(\bar{x}_{0-1}) = A_0 \psi_+(\bar{x}_{0-1}) + B_0 \psi_-(\bar{x}_{0-1}) \quad (2.19)$$

$$B_{-1} \psi'_-(\bar{x}_{0-1}) + 1 = A_0 \psi'_+(\bar{x}_{0-1}) + B_0 \psi'_-(\bar{x}_{0-1}) \quad (2.20)$$

$$A_1 \psi_+(\bar{x}_1) - \frac{\lambda}{\rho} = A_0 \psi_+(\bar{x}_1) + B_0 \psi_-(\bar{x}_1) + g_{10}(\bar{x}_1) \quad (2.21)$$

$$A_1 \psi'_+(\bar{x}_1) = A_0 \psi'_+(\bar{x}_1) + B_0 \psi'_-(\bar{x}_1) + 1 \quad (2.22)$$

$$B_{-1} \psi_-(-\bar{x}_{-1}) - \frac{\lambda}{\rho} = A_0 \psi_+(-\bar{x}_{-1}) + B_0 \psi_-(-\bar{x}_{-1}) + g_{-10}(-\bar{x}_{-1}) \quad (2.23)$$

$$B_{-1} \psi'_-(-\bar{x}_{-1}) = A_0 \psi'_+(-\bar{x}_{-1}) + B_0 \psi'_-(-\bar{x}_{-1}) - 1. \quad (2.24)$$

プレプリント論文では、これらの条件は更に次のように集約されることを示している。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \psi'_+(-\bar{x}_{01}) & -\psi'_-(-\bar{x}_{01}) \\ \psi'_+(\bar{x}_1) & -\psi'_-(\bar{x}_1) \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \psi_+(-\bar{x}_{01}) & -\psi_-(-\bar{x}_{01}) \\ \psi_+(\bar{x}_1) & -\psi_-(\bar{x}_1) \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \lambda\rho^{-1} - g_{01}(-\bar{x}_{01}) \\ \lambda\rho^{-1} + g_{10}(\bar{x}_1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \psi'_-(\bar{x}_{0-1}) & -\psi'_+(\bar{x}_{0-1}) \\ \psi'_-(-\bar{x}_{-1}) & -\psi'_+(-\bar{x}_{-1}) \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \psi_-(\bar{x}_{0-1}) & -\psi_+(\bar{x}_{0-1}) \\ \psi_-(-\bar{x}_{-1}) & -\psi_+(-\bar{x}_{-1}) \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \lambda\rho^{-1} - g_{0-1}(\bar{x}_{0-1}) \\ \lambda\rho^{-1} + g_{-10}(-\bar{x}_{-1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.26)$$

この2つの2×2の行列方程式 (2.25)、(2.26) を解くことにより、各 switching region を決定するしきい値 $\bar{x}_{01}, \bar{x}_{0-1}, \bar{x}_1, \bar{x}_{-1}$ を算出することが可能となる。

2. 4 効用関数内のコストとリスク回避度について

2.4.1 取引コスト率について

取引コスト率は、ロング、ショートポジションの構築時及び解消時いずれにおいても一定値としている。今回のペアトレード戦略では、常に両サイドのポジション、つまり一方の銘柄を買うと同時にもう一方の銘柄を売り建てる、あるいはそれらを同時に閉じることを考慮すると、いずれの投資行動においても取引コスト率は対称かつ一定と考えることは妥当であるといえる。

2.4.2 リスク回避度と貸株コスト率

信用取引（売建）を行うと、それに応じた貸株コスト率が発生するが、プレプリント論文では貸株コスト率についての指摘がない。しかし、効用関数内の第二項のリスク項が、ポジションを構築すること＝リスクという単純な構造となっているため、貸株コスト率をこのリスク回避度の項に組み入れることで、その影響を考えることができる。

つまり、貸株コスト率を ν とすると、効用関数第二項の係数を、

$$\lambda \rightarrow \lambda + \nu \quad (2.27)$$

と修正すればよい。この修正は単なる係数の修正に過ぎないため、プレプリント論文での帰結に影響することはない。なお、プレプリント論文では $\lambda \geq 0$ としているため、本稿においても同じ前提、すなわち $\lambda + \nu \geq \nu$ として分析を進める。

3. モンテカルロシミュレーションによるサンプル

3. 1 シミュレーションの流れ

本稿では、確率過程（O-U 過程）に関する複数の組み合わせを用意し、それぞれのパラメータの組み合わせに対して、以下のような流れでシミュレーションを行い、プレプリント論文の手法の有効性について議論していく。

1. 確率過程 (2.1) および効用関数 (2.2) を特徴づけるパラメータを用意し、そのパラメータに応じたしきい値を、行列方程式 (2.25)、(2.26) を解くことによって算出する。
2. 上記パラメータを利用して、O-U 過程に従う確率パスをランダムに 1,000 回発生させる。なお、使用周期は日次（すなわち 1,000 営業日、一年間を 250 営業日と想定）、初期値は $X_0 = L$ とする。
3. 前章のロジックに従い、ポジション構築・解消を行う。
4. ポジションを構成するごとにゲイン関数を計算し、その累積値を求める。
5. 999 営業日にポジションを構築していた場合には、1,000 営業日にポジションを解消する。
6. 最終的な累積ゲイン関数（累積リターン）、それぞれのポジション構築・解消回数を計算する。

7. 以上を 10,000 回繰り返し、最終的な累積ゲイン関数の平均値、標準偏差、1 パーセント点（下側から 1%の値）、99 パーセント点（下側から 99%の値 = 上側から 1%の値）、リターンリスク比、それぞれのポジションの構築・解消回数および構築期間の平均を計算する（いずれも年率換算する）。

以上の手法によるモンテカルロシミュレーションを、プレプリント論文で使用されているパラメータ、J-REIT 銘柄のペアから推定したパラメータ、そして本稿が独自に選択した複数のパラメータの組み合わせで行い、当ペアトレード戦略のパラメータ依存性を議論する³。

3. 2 単一のパラメータの組み合わせによるシミュレーション

3.2.1 プレプリント論文で使用されているパラメータでの結果

論文と同じ条件: $L = 0, \mu = 0.8, \sigma = 0.5, \delta = 0.005, \lambda = 0.07, \rho = 0.1$ の場合の検証結果について考察する⁴。

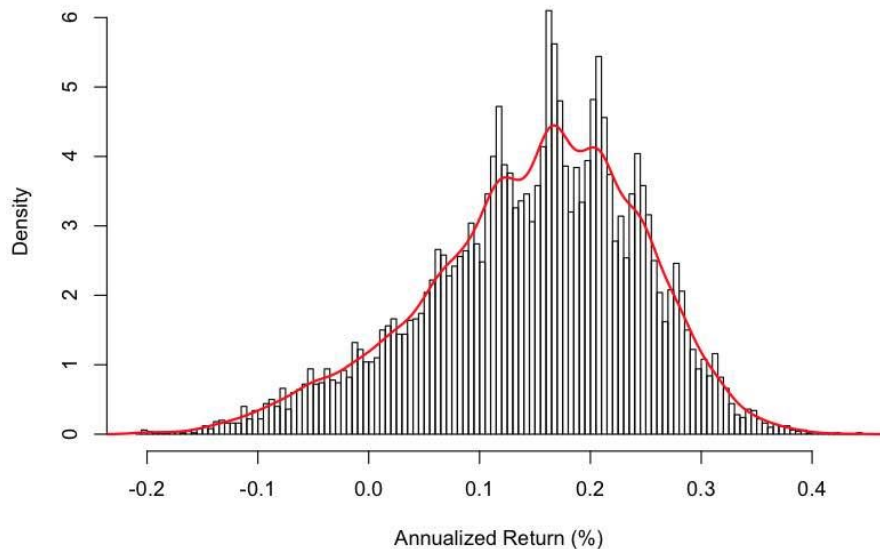
各しきい値は、行列方程式 (2.25)、(2.26) を解くと、 $x_{01} = 0.2094, \bar{x}_1 = 0.0483, \bar{x}_{-1} = 0.0483, x_{0-1} = 0.2094$ となる。

これらのパラメータおよびしきい値を利用してモンテカルロシミュレーションを行い、得られたリターン分布が図 3 である。

³しきい値のパラメータ依存性については、プレプリント論文で詳しく展開されている。本稿では、パフォーマンス指標を中心に議論する目的に鑑み、パラメータのしきい値に対する依存性については、（一部を除き）詳しい議論は行わないこととする。

⁴プレプリント論文[1]で利用されている例は、その本文中には具体的に明示されていないものの、[7] で使われている例と一致していることから、Wal-Mart Stores Inc. (WMT)と Target Corp. (TGT)の、1992 年から 2000 年における日次スプレッドより推定したものであると考えられる。

図3：論文で使用されたパラメータ例によるリターン分布



出所：日興フィナンシャル・インテリジェンス

表1：論文で使用されたパラメータ例での結果、各種統計量

年率リターン(%)	標準偏差 (%)	1パーセント点(%)	99パーセント点(%)	リターンリスク比
14.7769	29.1457	-15.3401	33.6834	0.5070

出所：日興フィナンシャル・インテリジェンス

表2：論文で使用されたパラメータ例での結果、ポジション構築・解消回数と構築期間 年間平均

open-to-buy(回)	open-to-sell(回)	buy-to-open(回)	Sell-to-open(回)	構築期間(日)
0.5087	0.5190	0.5109	0.5087	196.9878

出所：日興フィナンシャル・インテリジェンス

プレプリント論文で使用されているパラメータによるシミュレーションの結果は、年率リターンが14.7769%であることが分かった。ただし、1パーセント点が-15.3401%とマイナス値になっていることから、戦略が機能しなかった時のリスクが大きいといえよう。リターンリスク比も0.5070と1を下回っていた。

3.2.2 J-REIT 銘柄ペアから算出したパラメータでの結果

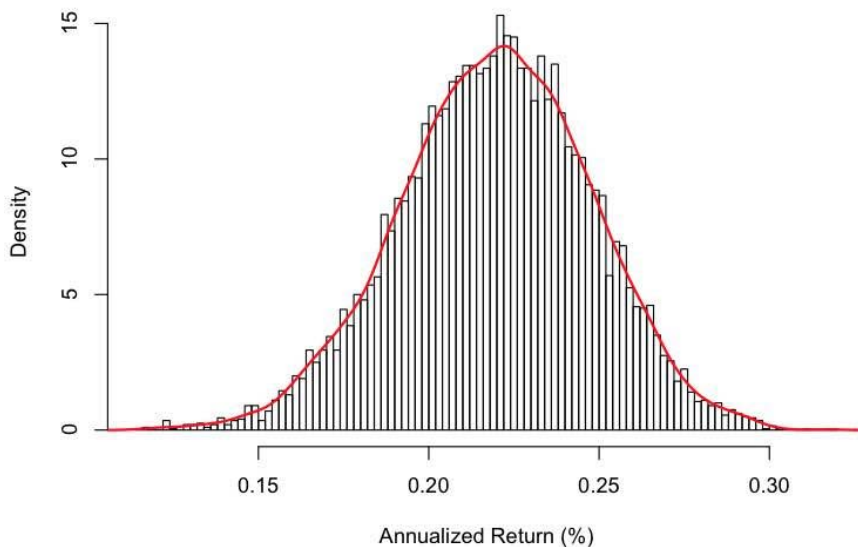
プレプリント論文のパラメータ例は、米国市場における銘柄をもとに推定されたこともあり、抵抗係数 μ および標準偏差 σ が日本のペア銘柄から推定されるものと乖離している可能性がある。

そこで、日本の市場に上場している銘柄のうち、比較的相関が高く適度な平均回帰性を持つであろう⁵「日本ビルファンド投資法人(証券コード 8951)」と「ジャパンリアルエステイト投資法人(証券コード 8952)」のペア(2011年1月から2014年12月までの日次データの相関=0.7750)のスプレッドから推定した $\mu = 11.7198, \sigma = 0.1848$ および $L = 0, \nu = 0.0015, \rho = 0.00325$ を用いて、同様のシミュレーションを行ってみた。パラメータ推計にあたっては、最小二乗法を利用した⁶。

各しきい値は、行列方程式 (2.25)、(2.26) を解くと、 $x_{01} = 0.0255, \bar{x}_1 = 0.0125, \bar{x}_{-1} = 0.0125, \bar{x}_{0-1} = 0.0255$ となる。

これらのパラメータおよびしきい値を利用してモンテカルロシミュレーションを行い、得られたリターン分布が図4である。

図4：J-REIT 銘柄ペアから算出したパラメータによるリターン分布



出所：日興フィナンシャル・インテリジェンス

表3：論文で使用されたパラメータ例での結果、各種統計量

年率リターン(%)	標準偏差 (%)	1パーセント点(%)	99パーセント点(%)	リターンリスク比
21.9810	10.2207	15.3680	28.4555	2.1506

出所：日興フィナンシャル・インテリジェンス

⁵本稿では平均回帰性を持つペア銘柄を見つけることが主目的ではないので、具体的なペア選定方法についての説明は省略する。

⁶実際には $L=0.0556$ であったが、今回の検証では $L=0$ としてシミュレーションを行った。

表4：論文で使用されたパラメータ例での結果、ポジション構築・解消回数と構築期間 年間平均

open-to-buy(回)	open-to-sell(回)	buy-to-open(回)	Sell-to-open(回)	構築期間(日)
3.2479	3.2491	3.2491	3.2479	209.7755

出所：日興フィナンシャル・インテリジェンス

年率リターンは、年率 21.9810%、1 パーセント点は 15.3680%とマイナスになることもなく、リターンリスク比も 2.1506 であり、先の例と比べて大幅に好パフォーマンスであることがわかった。

3. 3 複数のパラメータの組み合わせによるシミュレーション

続いて、スプレッドの標準偏差 σ 、抵抗係数 μ 、取引コスト率 ε の3つのパラメータに着目し、これらが当ペアトレード戦略に与える影響を把握するため、これらの複数の組み合わせによるシミュレーションを行う。

3.3.1 スプレッドの抵抗係数と標準偏差の関係性

プレプリント論文で使用したパラメータと J-REIT 銘柄ペアから推定したパラメータを比較すると、それぞれのスプレッドの標準偏差に大きな差があるが、それよりもむしろ、スプレッドの抵抗係数と標準偏差の比のオーダーのほうがオーダーレベルで非常に差があることの方が気になるところである。

- プレプリント論文の $\mu/\sigma = 1.3000$
- J-REIT 銘柄ペアから推定したパラメータ： $\mu/\sigma = 63.4188$

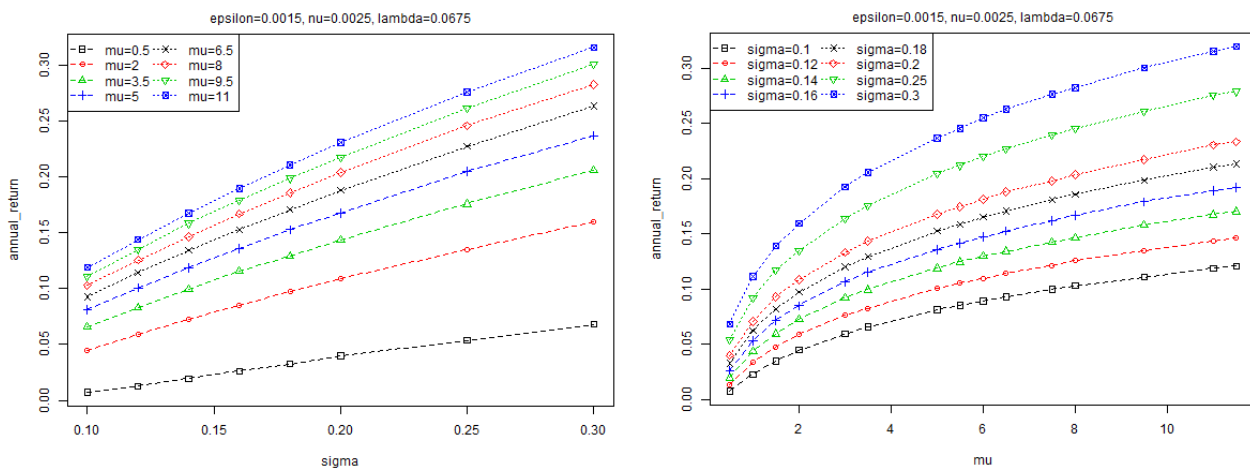
そこで、これらの量の影響を把握するため、スプレッドの標準偏差および抵抗係数の組み合わせを複数用意して、それぞれの変化による影響を、モンテカルロシミュレーションを行い調べてみた。

パラメータの組み合わせは以下の方法で行う。

- スプレッドの標準偏差： $\sigma = (0.5, 0.10, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18, 0.20, 0.25, 0.30)$
- スプレッドの抵抗係数： $\mu = (0.5, 2.0, 3.5, 5.0, 6.5, 8.0, 9.5, 11.0)$
- その他の指標は固定： $L = 0, \varepsilon = 0.0015, \nu = 0.0025, \lambda = 0.0675, \rho = 0.00325$

シミュレーション結果について、横軸をスプレッドの標準偏差、抵抗係数、縦軸を年率リターンとしてプロットしたのが、図5である。

図5：年率リターン（縦軸）とスプレッドの標準偏差および抵抗係数（横軸）



【グラフ内のパラメータ】

sigma: スプレッドの標準偏差
nu: 貸株コスト率

mu: スプレッドの抵抗係数
lambda: リスク回避度

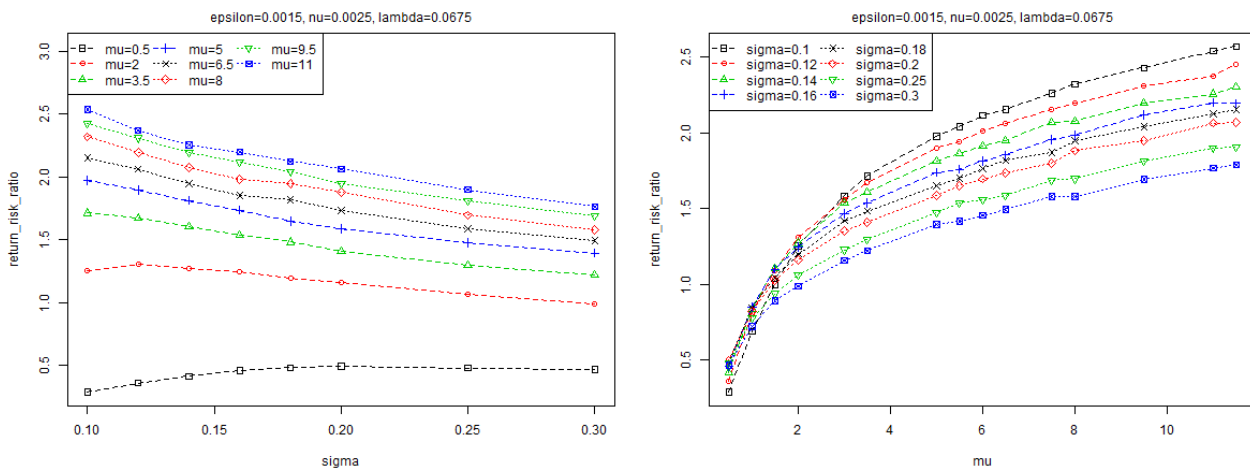
epsilon: 取引コスト率

出所: 日興フィナンシャル・インテリジェンス

スプレッドの標準偏差、スプレッドの抵抗係数が大きいほど、年率リターンが高くなるのがわかる。

一方、図5において、年率リターンの代わりにリターンリスク比を採用すると、図6となる。

図6：リターンリスク比（縦軸）とスプレッドの標準偏差および抵抗係数（横軸）



【グラフ内のパラメータ】

sigma: スプレッドの標準偏差
nu: 貸株コスト率

mu: スプレッドの抵抗係数
lambda: リスク回避度

epsilon: 取引コスト率

出所: 日興フィナンシャル・インテリジェンス

リターンリスク比は、スプレッドの抵抗係数に強く依存していることがわかる。スプレッドの標準偏差については、 $\mu = 0.5$ および $\mu = 2$ の一部を除くと、その水準が高くなるにつれてリターンリスク比は低下しているが、その影響度はスプレッドの抵抗係数ほど顕著ではない。

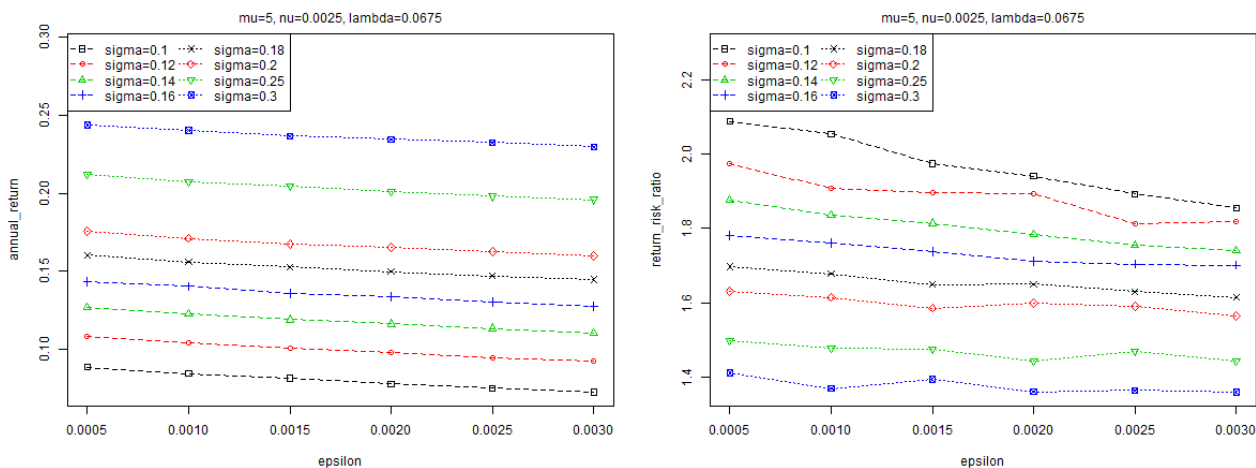
3.3.2 スプレッドの標準偏差と取引コスト率の関係性

続いて、取引コスト率による影響を調べる。まず、スプレッドの標準偏差との関係性を調べる。抵抗係数と標準偏差と時のシミュレーションと同様、パラメータの複数の組み合わせを用意し、それぞれの変化による影響を、モンテカルロシミュレーションを行い調べてみた。

- スプレッドの標準偏差: $\sigma = (0.5, 0.10, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18, 0.20, 0.25, 0.30)$
- 取引コスト率: $\epsilon = (0.0005, 0.0010, 0.0015, 0.0020, 0.0025, 0.0030)$
- スプレッドの抵抗係数は固定: $\mu = 5$
- その他の指標は固定: $L = 0, \nu = 0.0025, \lambda = 0.0675, \rho = 0.00325$

シミュレーションで得られた結果を、横軸を取引コスト率に、縦軸を年率リターン、リターンリスク比とし、同じスプレッドの標準偏差ごとに線で結んで表示すると、図7のようになる。

図7: スプレッドの標準偏差別、年率リターン、リターンリスク比（縦軸）と取引コスト率（横軸）



【グラフ内のパラメータ】

sigma: スプレッドの標準偏差
nu: 貸株コスト率

mu: スプレッドの抵抗係数
lambda: リスク回避度

epsilon: 取引コスト率

出所: 日興フィナンシャル・インテリジェンス

年率リターンに関しては、スプレッドの標準偏差が一定の場合はそれぞれ、コストが増加するに従い累積リターンは低下しているが、その影響はスプレッドの標準偏差の変化（すなわちある線から別の線

への遷移) と比べると軽微である。

リターンリスク比は、スプレッドの標準偏差が大きくなるほど、取引コスト率とともにリターンリスク比がおおむね低下傾向にある。

3.3.3 スプレッドの抵抗係数と取引コスト率の関係性

今回は取引コスト率とスプレッドの抵抗係数との関係性を調べる。

基本的にスプレッドの抵抗係数が高いほど、より平均に回帰する傾向が強くなるため、一度ポジションを構築したとしても、短い間にそのポジションを閉じる可能性が高くなる。よって、取引回数は増加することが予想される。当然ながら、取引回数が多いほど収益の機会が増えるため、累積リターンは上昇すると考えられる。さらに、抵抗係数が高いほどその投資効率が上がるということが、前述の分析結果より判明している。しかし一方で、取引回数増加は取引コスト率による影響が強くなることを意味する。

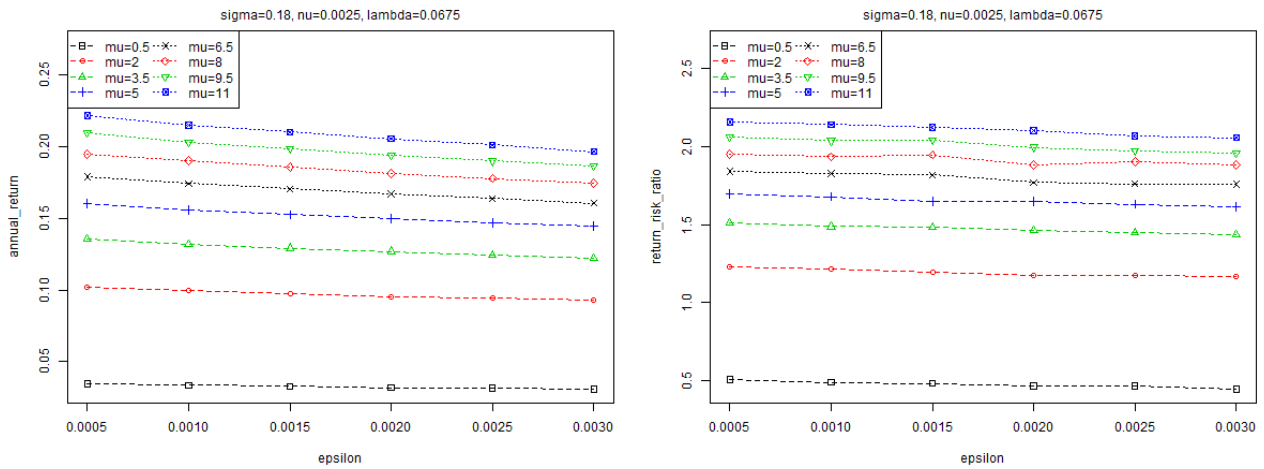
ゆえに、このトレードオフの関係を見積もるためにも、スプレッドの抵抗係数と取引コスト率の関係性についての評価が必要になってくる。

ここでは、次のようなパラメータの組み合わせを考える。

- スプレッドの抵抗係数: $\mu = (0.5, 2.0, 3.5, 5.0, 6.5, 8.0, 9.5, 11.0)$
- 取引コスト率: $\varepsilon = (0.0005, 0.0010, 0.0015, 0.0020, 0.0025, 0.0030)$
- スプレッドの標準偏差は固定: $\sigma = 0.18$
- その他の指標は固定: $L = 0, \nu = 0.0025, \lambda = 0.0675, \rho = 0.00325$

シミュレーションで得られた結果を、横軸を取引コスト率に、縦軸を年率リターンまたはリターンリスク比とし、同じスプレッドの抵抗係数ごとに線で結んで表示すると、図8のようになる。

図8: スプレッドの抵抗係数別、年率リターン、リターンリスク比（縦軸）と取引コスト率（縦軸）



【グラフ内のパラメータ】

sigma: スプレッドの標準偏差
nu: 貸株コスト率

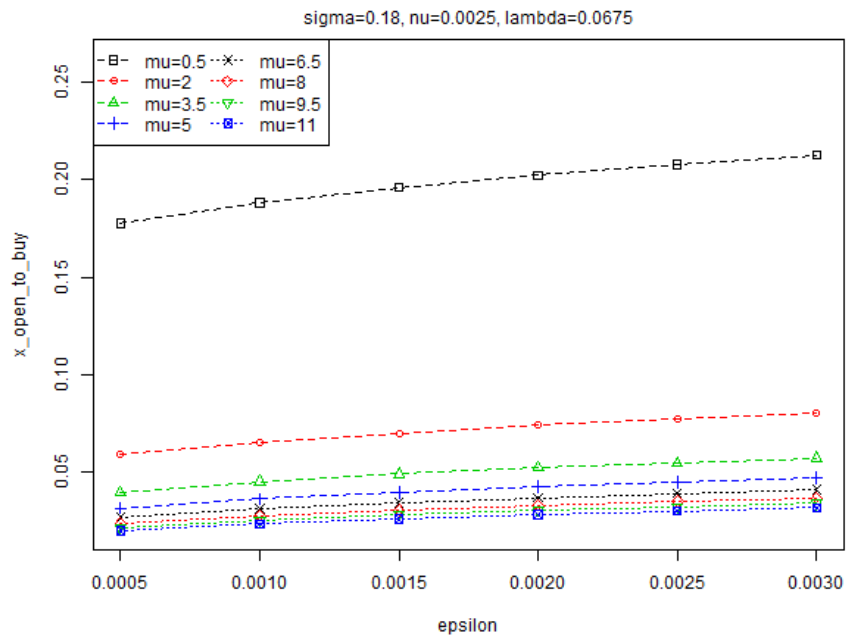
mu: スプレッドの抵抗係数
lambda: リスク回避度

epsilon: 取引コスト率

出所: 日興フィナンシャル・インテリジェンス

年率リターンは当然ながら取引コスト率増加とともに減少するが、リターンリスク比に関しては、わずかに低下する程度であった。これは、理論的には取引コスト率が増加するとしきい値が増加する傾向にあるため、しきい値が上がることで当ペアトレード戦略自体のリスクが軽減された影響であると考えることができる。図9に open-to-buy のしきい値、スプレッドの抵抗係数と取引コスト率を図示しておく。

図9: スプレッドの抵抗係数別、open-to-buyのしきい値（縦軸）と取引コスト率（横軸）



【グラフ内のパラメータ】

sigma: スプレッドの標準偏差
nu: 貸株コスト率

mu: スプレッドの抵抗係数
lambda: リスク回避度

epsilon: 取引コスト率

出所: 日興フィナンシャル・インテリジェンス

3.3.4 ポジションの構築回数への影響

これまででは、各パラメータの、ペアトレード戦略におけるリターンやリスクに対する影響度を見てきたが、今度はそれらがポジションの構築回数にどの程度影響するのかを調べてみる。

まず、端的にその影響度を見るため、上記検証で利用したすべてのパラメータの組み合わせから得られた結果を用いて、

- 被説明変数: open-to-buy の回数の平均 + open-to-sell の回数の平均
- 説明変数: スプレッドの標準偏差、抵抗係数、取引コスト率

として、重回帰分析を行ってみた。その結果を以下に示す。

表 5: ポジションの構築回数平均 重回帰分析

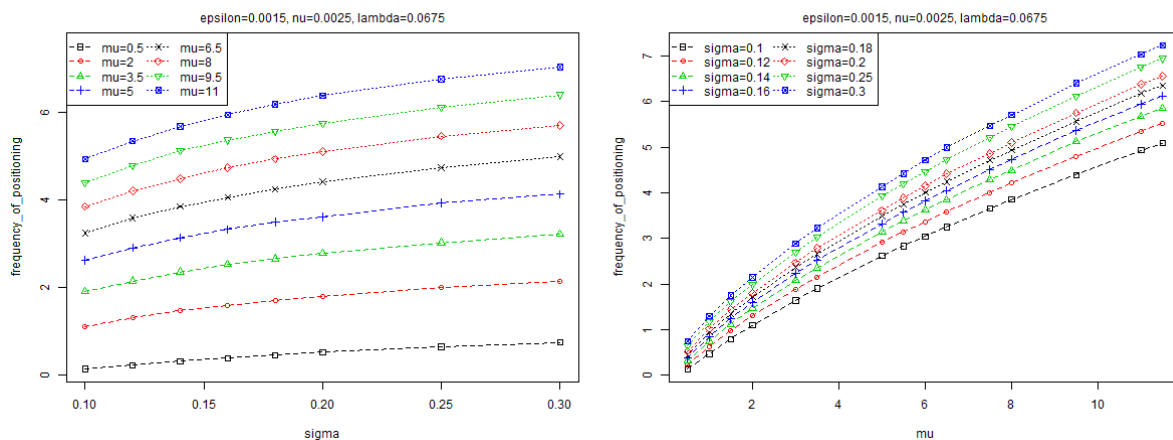
項目	回帰係数	t 値	p 値
切片	0.1950	3.8530	0.0001
スプレッドの標準偏差	3.6670	19.7370	0.0000
スプレッドの抵抗係数	0.2604	76.9450	0.0000
取引コスト率	-333.1935	-16.7810	0.0000

出所: 日興フィナンシャル・インテリジェンス

ポジションの構築回数平均は、t 値や p 値で判断する限りにおいては、スプレッドの標準偏差、抵抗係数、取引コスト率からの影響が強いことがわかる。

スプレッドの標準偏差、抵抗係数の変化によるポジションの構築回数平均の推移を示したのが、図 10 である。

図 10: ポジションの構築回数平均（縦軸）とスプレッドの標準偏差または抵抗係数（横軸）



【グラフ内のパラメータ】

sigma: スプレッドの標準偏差
nu: 貸株コスト率

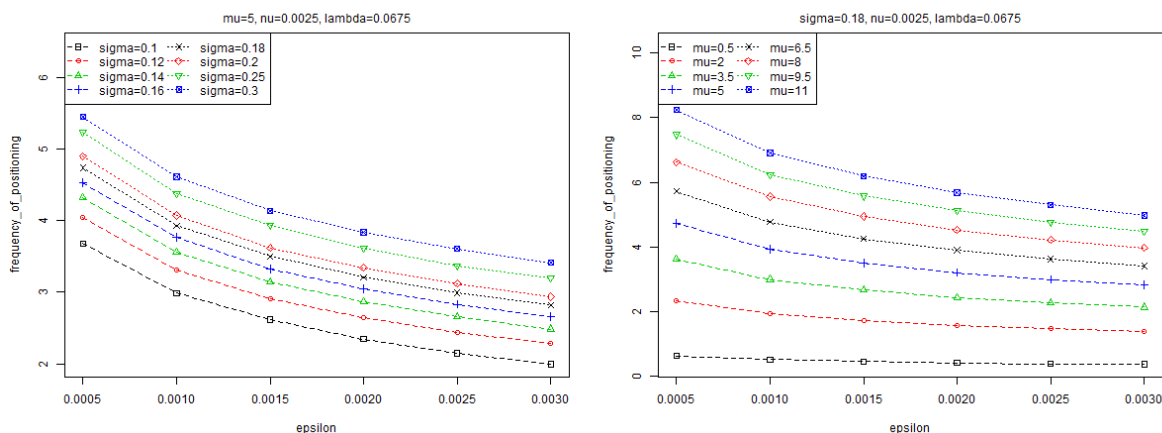
mu: スプレッドの抵抗係数
lambda: リスク回避度

epsilon: 取引コスト率

出所: 日興フィナンシャル・インテリジェンス

取引コスト率の影響は、図 11 のようになる。

図 11: ポジションの構築回数平均（縦軸）とスプレッドの標準偏差または抵抗係数（横軸）



【グラフ内のパラメータ】

sigma: スプレッドの標準偏差 mu: スプレッドの抵抗係数 epsilon: 取引コスト率
nu: 貸株コスト率 lambda: リスク回避度

出所: 日興フィナンシャル・インテリジェンス

スプレッドの標準偏差や抵抗係数がどの水準であっても、コスト増加とともにポジション構築回数が減少していることがわかる。

3.3.5 ポジションの構築期間への影響

最後に、各パラメータの、ポジションの構築期間の影響度を調べる。

まず、構築回数と同様の重回帰分析を行ってみる。

- 被説明変数: ポジションの構築期間平均
- 説明変数: スプレッドの標準偏差、抵抗係数、取引コスト率

その結果を以下に示す。

表 6: ポジションの構築期間平均 重回帰分析

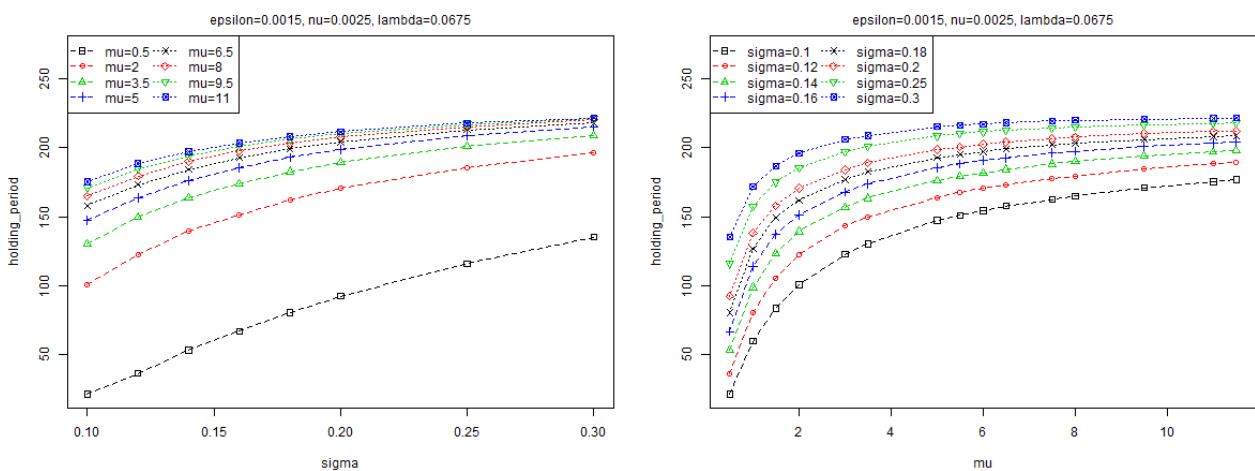
項目	回帰係数	t 値	p 値
切片	71.6467	11.1050	0.0000
スプレッドの標準偏差	338.8095	14.3060	0.0000
スプレッドの抵抗係数	8.7641	20.3170	0.0000
取引コスト率	-1849.5483	-0.7310	0.4660

出所: 日興フィナンシャル・インテリジェンス

ポジションの構築期間平均は、t 値や p 値で判断する限りにおいては、スプレッドの標準偏差、抵抗係数が大きくなると増加することがわかる。また、取引コスト率の影響は統計的には有意ではないといえる。

スプレッドの標準偏差、抵抗係数の変化によるポジションの構築期間平均の推移を示したのが、図 12 である。

図 12: ポジションの構築期間平均（縦軸）とスプレッドの標準偏差または抵抗係数（横軸）



【グラフ内のパラメータ】

sigma: スプレッドの標準偏差
nu: 貸株コスト率

mu: スプレッドの抵抗係数
lambda: リスク回避度

epsilon: 取引コスト率

出所: 日興フィナンシャル・インテリジェンス

3. 4 シミュレーション結果のまとめ

以下、本稿で行ったシミュレーション結果をまとめる。

1. プレプリント論文で使用されているパラメータによるシミュレーションの結果は、年率リターンが 14.7769%であることが分かった。ただし、1 パーセント点が-15.3401%とマイナス値になっていることがわかった。戦略が機能しなかった時のリスクが大きいといえよう。リターンリスク比も 0.5070 と 1 を下回っていた。
2. 実際に日本の株式市場で取り扱われている銘柄の性質に近い数値でシミュレーションを行った。実際のサンプルとして J-REIT 2 銘柄を選択。それらのスプレッドから推定したパラメータを利用してシミュレーションを行った結果、年率リターンは 21.9810%、1 パーセント点は 15.3680%とマイナスになることもなく、リターンリスク比も 2.1506 であり、プレプリント論文のパラメータ例による結果を上回る結果となった。

さらに複数のパラメータの組み合わせで、シミュレーションを行った結果、それぞれのパラメータが当ペアトレード戦略に与える影響度として、次のような結果が得られた。

1. 高い年率リターンを狙うには、スプレッドの標準偏差や抵抗係数が高いペアを選んだほうがよい。
2. スプレッドの標準偏差が同じならば、スプレッドの抵抗係数がより高いほうが、リターンリスク比が高く投資効率がよい。
3. 取引コスト率の影響よりも、スプレッドの標準偏差や抵抗係数のほうが、当ペアトレード戦略に与える影響が大きい。
4. スプレッドの抵抗係数増加は、ポジション構築回数を高めるため、取引コスト率が増加するほど年率リターンは低下してしまうが、一方でしきい値が上昇することにより、当ペアトレード戦略自体のリスクが低下するため、リターンリスク比で見た投資効率性にはあまり影響を与えない。
5. ポジション構築回数の平均は、スプレッドの標準偏差や抵抗係数が増加するにつれて増え、取引コスト率が増加するほど減る。特にスプレッドの抵抗係数に強く影響を受ける。
6. ポジションの構築期間平均は、スプレッドの標準偏差や抵抗係数が大きくなると増加することがわかる。また、取引コスト率の影響は小さい。

4. 考察と課題

4. 1 当ペアトレード戦略のメリット

ペアトレード戦略を構築する上で、はじめの障壁は、平均回帰性を持つペアを具体的に見つけることであることは言うまでもない。しかし、仮にそのような適切なペアが見つかったとしても、次にどのようなタイミングで売買をしていけばよいのかを決めなければならない。よく見られるケースは、ヒストリカルデータを利用して条件を変えながらシミュレーションを何度も繰り返すことで、売買タイミングを決めるしきい値を見出すという方法である。ところが、この方法では、選んできたペアの固有の性質、どの時点でのヒストリカルデータを用いるのか等に依存し、その都度、シミュレーションを行わなければならないため、膨大な計算量と時間がかかってしまうと予想される。

その一方、今回紹介した論文では、適切な平均回帰性をもつペアを見出すことの困難さに関しては、他の多くの手法と同様の課題はあるが、一旦適切なペアが見つかってしまえば、その後は、膨大なシミュレーションなどせずに、厳密な数学の理論の帰結を利用して、売買タイミングを決定するしきい値が一意的に決まってしまう。よって、戦略アルゴリズム決定プロセスが大幅に短縮されると期待される。

これにより、例えば以下のようなメリットが享受できるのではないかと考えられる。

メリット1：ペア銘柄数が非常に多くなったとしても十分機能すること

ペアトレード戦略は、一般的には非常にリスクの高い戦略であるが、分散投資、すなわち多くのペア

銘柄への投資を行うことで、その固有リスクを軽減できる可能性が高い。今回紹介した手法は、ペアさえ決まってしまうと、あとは一意的かつ自動的にポジション構築のルールが決定してしまうため、実証的にルールを決定する方法と比較すると、はるかに数多くのペアによる運用が実現しやすいといえる。

メリット2：急な市場環境の変化にも柔軟に対応が可能なこと

急な市場環境の変化が起こった場合、すでに選択された銘柄ペアにおいて、その平均回帰性は失っていないものの、そのスプレッドが支配するO-U過程のパラメータが変わってしまう可能性は大いにありうる。しかし、その場合であっても、従来のような実証的手法によりしきい値を決定するように再び膨大な検証をする必要がなく、新しく推計されたO-U過程のパラメータを用いて行列方程式(2.25)、(2.26)を改めて解き直すだけでよい。したがって、市場環境の変化に対しても柔軟に対応できると考えられる。

メリット3：パラメータ水準から将来のリターンやリスクを推定するプロファイルが作成可能なこと

このペアトレード戦略は、非常に限定されたパラメータによって特徴づけられる戦略である。本稿で展開したような複数のパラメータの組み合わせによるシミュレーションを事前に行っておくと、平均回帰性を持つペア銘柄を見つけ、そのスプレッドから推測される各種パラメータさえわかれば、どのくらいのリターンが期待できるかをあらかじめ推測することが可能となる。事前にペアトレード戦略の「プロファイル」を用意できるといえよう。

メリット4：戦略の妥当性、客観性が高いこと

多くの実証的な手法では、しきい値の決定の際に利用するヒストリカルデータの期間に大きく依存してしまう。したがって、一度決定したしきい値が、将来においても有効なのかということについて説明を求められた場合、合理的な回答をすることは一般的には難しいと考えられる。仮に一時的に合理的な回答ができたとしても、その先も引き続き、その根拠が正しいのかをどうかを、分析対象期間を変化させながら検証し続けなければならない。しかし、本稿で紹介した手法は、スプレッドが平均回帰性を持つ確率過程にさえしたがつている限りにおいては、厳密にしきい値が一意的に存在することを証明しているため、その決定方法については普遍的であり、非常に客観的で高い説得力を持っているといえる。

4.2 実務へ応用するときの課題

本稿で紹介するペアトレーディング戦略は、実務への応用のために乗り越えなければならない課題も多い。

課題1：実際の銘柄を利用したバックテストでは効果があるのか

本稿では、一部の検証において、J-REITの銘柄ペアから推定したO-U過程のパラメータを利用した

が、実際には各パラメータの組み合わせを変化させた場合におけるシミュレーションしか行っておらず、実際にペアをピックアップしての実証的検証はなされていない。より現実的な可能性を議論する上では、具体的な銘柄ペアを用いたバックテストが不可欠であるのは言うまでもない。

課題 2: 平均回帰点とのかい離をどのように把握するのか

今回、本稿では、出発点=平均回帰値として、open ポジションからシミュレーションを開始している。しかし、実際には、buy もしくは sell ポジションから開始されるケースも考えられる。実際に戦略を実行する場合には、戦略開始時点で、銘柄ペアのスプレッドが平均回帰値と比べてどの水準にあるのかを、把握しておく必要がある。

課題 3: 平均回帰性が失われた場合の判断をどのように行うのか

本稿でのシミュレーションは、あくまでもシミュレーション期間中において、スプレッドが一定のパラメータで特徴づけられる平均回帰性に常に従うことを前提にしている。当然ながら現実的にはこの性質が崩れる可能性がある。実務での応用の際には、どのようなタイミングでこうした平均回帰性の喪失を判断するのかについて十分に議論しておく必要がある。

課題 4: ロスカットを考慮するとしきい値にどう影響を与えるのか

プレプリント論文および本稿では、最終営業日（本稿では 1,000 営業日）以外、特にロスカットを考慮していないが、実際の運用を行う上では、その導入は不可欠であるといえる。ただし、もしロスカットを行う新たなしきい値を用意する場合には、プレプリント論文で展開されている効用関数の最適化問題にどのように影響するのか、より具体的には、switching region の存在証明および smooth-fit conditions への影響度を、理論的にあらためて検証し直す必要がある。

5. まとめ

本稿では、2014年12月24日に公開された Ngo と Pham によるプレプリント論文 “Optimal switching for pairs trading rule: a viscosity solutions approach” [1]のレビューを行うとともに、その日本市場における活用の可能性を考察するため、様々な平均回帰性を持つ銘柄ペアを想定したシミュレーションを行った。あわせて銘柄ペアの平均回帰性に関連するパラメータ（抵抗係数、ボラティリティ）や取引コスト率といったパラメータ依存性についても検証した。

その結果、当ペアトレード戦略は、そのリスクに見合う十分なリターンが得られることが判明した。パラメータ依存性に関しては、スプレッドの標準偏差が高いほど高いリターンを得られる可能性が高いが、ペアトレード戦略のリスクを考慮すると、リターンリスク比で比較する限り、その投資効率はスプレッドの標準偏差が高いほど低く、スプレッドの抵抗係数が高いほど高くなることがわかった。また、ポジション構築回数の平均およびポジションの構築期間平均のパラメータ依存性について検証した結

果、スプレッドの抵抗係数からの影響が特に強いこと、取引コスト率の増減に応じてしきい値が変化することで、回数や期間が適切に調整されていることを確認できた。

本稿で紹介した手法の持つ、一旦ペア銘柄が決まってしまうと、その後は厳密な数学の理論の帰結を利用して、売買タイミングを決定するしきい値が一意的に決まってしまうという強力なメリットにより、1. ペア銘柄数が非常に多くなったとしても十分機能すること、2. 急な市場環境の変化にも柔軟に対応が可能なこと、3. パラメータ水準から将来のリターンやリスクを推定するプロファイルが作成可能なこと、4. 戦略の妥当性、客観性が高いこと、といった数多くのメリットをもたらすことが期待される。

しかし、現実的な応用のためには、1. 実際の銘柄を利用したバックテストでは効果があるのか、2. 平均回帰点とのかい離をどのように把握するのか、3. 平均回帰性が失われた場合の判断をどのように行うのか、4. ロスカットを考慮するとしきい値にどう影響を与えるのか、についての検証をさらに進めていく必要があると考えられる。

謝辞

本稿の執筆においてレビューした Ngo と Pham の論文で展開されている方程式に関する数値計算解法について、多大なる助言とご指導をいただいた Symbolic Systems, Inc. 松田裕幸氏に感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Ngo, M and Pham, H: "Optimal switching for pairs trading rule: a viscosity solutions approach", <http://arxiv.org/abs/1412.7649>.
- [2] Elliott, R. J., Van der Hoek J. and W. P. Malcom, "Pairs Trading", Quantitative Finance, 5(2005) 271-276.
- [3] Mudchanatongsuk, S., Primbs J. and W. Wong (2008): "Optimal pairs trading: A stochastic control approach", American Control Conference, IEEE, 2008.
- [4] Tourin A. and R. Yan (2013): "Dynamic pairs trading using the stochastic control approach", Journal of Economic Dynamics and Control, vol 37, 1972-1981.
- [5] Zhang, H. and Q. Zhang (2008): "Trading a mean-reverting asset: Buy low and sell high", Automatica, vol 44, 1511-1518.
- [6] Kong, H. T. (2010): "Stochastic control and optimization of assets trading", PhD thesis, University of Georgia.
- [7] Song, Q. and Q. Zhang (2013): "An optimal pairs-trading rule", Automatica, vol 49, 3007-3014.
- [8] Leung, T. and X. Li (2013): "Optimal Mean Reversion Trading with Transaction Costs and Stop-Loss Exit", Social Science Research Network Working Paper Series.