＜論　文＞

条件付請求権の社会的意義に関する考察

社会システム研究所　立石　隆英

要　約

将来の不確実な様々な状態に応じて、ある権利が享受できる仕組みがあれば、将来時点の状態の見込みに基づいて、その想定されうる状態に対応する権利を選択することができるしくみを考えることができる。このような権利は条件付請求権[1]（Contingent Claim）と呼ばれている。将来の株価の水準は不確実ながら、ある一定の株価水準以上あるいは以下であるときにその差額を享受できる権利が想定されるオプション取引がこの典型的な事例の一つである。本稿では、まず、株式コールオプションそのものが、パレート最適[2]をもたらしうることを１期間２時点モデルにおいて Arrow-Debreu[3]証券を導入して数式的に確認する。この株式コールオプション市場が理論的には市場参加者間でパレート最適になりうるしくみであることを公共サービス市場について考えると、公共サービスによって個々人の生活の満足度が改善するという請求権に関わる市場が条件付請求権市場になることが、社会的にみて望ましいと推論できる。個々人の生活の満足度に関わる請求権に関する考察をする際に条件付請求権的なアプローチも有効であると考えられる。また、このような請求権の価値を考えるにあたって、個々人の生活に関わる様々な満足度に関わる情報の体系的な収集が必要不可欠である。

目　次

1. はじめに
2. 現物株市場におけるオプション取引の意義
3. 社会生活における条件付請求権の考察
4. おわりに

[1] 状態条件付請求権（State Contingent Claim）ともいう。
[2] 「パレート最適」については『今月の用語』（42 ページ）を参照。
[3] 「Arrow-Debreu」については『今月の用語』（42 ページ）を参照。

1．はじめに

オプションの売り手になると、大きなリスクを抱える可能性が高いことが議論されるが、売り手がそのようなリスクのみを考えるとしたら、オプション市場は成立しない。オプション市場においても、その権利の買い手、売り手いずれもが、その立場になることが望ましいと考えるから値段が決まるのである。

オプションは将来のある状態における財の請求権を取引することから、買い手、売り手双方の将来のある状態に対する見方が異なることによって、双方の効用が最大になるような価格に落ち着くと考えることができる。数式的には 1 時点 2 期間モデルに Arrow-Debreu 証券を導入することによって証明することができる。権利の買い手と売り手の双方がそのような判断のできる情報を十分に入手しているときに、現実の条件付請求権市場が、いわゆるパレート最適に近づくと考えられる。

本稿では、個々人の社会生活における将来の満足度が現在のそれを上回る際に行使できるコールオプションを考えてみたい。社会生活における満足度といっても広範にわたるので、個々人の医療と保険、教育と文化、生活環境、地域生活に対する公共サービスの満足度を考えてみたい。内閣府の調査によれば、90 年代から一貫して生活全般の満足度は低下しており、様々な分野において、より高い生活満足度が得られるような公共サービスの提供も必要であると考えられる。公共サービス市場が条件付請求権市場に近づけば、個々人の満足度の改善が期待できると考えられる。公共サービス市場がパレート最適な状態になると考えられるからである。

しかし、そのような市場でのコールオプションを考える際に一個人や一企業がその売り手になるとは考えにくい。社会通念上、将来の社会生活満足度が低下することを前提にプレミアムを得て、将来満足度が低下したときに権利行使に応えることなくプレミアムを確保したいと考えないだろう。一方で、権利が行使されることを前提としてコールオプションの売り手になることもありえるが、一個人や一企業が限りない権利の行使に応えることは難しい。このような権利行使に応えうる売り手になりえるのは一個人や一企業ではなく、国や自治体といった公共サービスに関わる機関であると考えられる。公共機関が個々人の生活満足度を高められるようなオプションを想定し、それに対して個々人が相応のプレミアムを支払うといった形の公共サービス市場が今後求められると考えられる。その際に株式オプションにおける株価の計測が必要なように、公共サービス市場における個々人の満足度の体系的な計測が必要となってくると考えられる。個々人からデータ収集方法の体系化が今後、よりよい社会を考えてゆく際に重要になってくると考えられる。例えば、個々人の生活において関心の高い健康に関しても個々人の健康に対する意識や満足度に関わるデータ収集が体系的に行われる必要があるだろう。アンケート設問を考える際に、個々人の健康満足度を計測するのに有効な設問の構築と広範囲でのデータ収集が必要である。個々人の生活の質を高めるために、個々人の生活に関する様々な分野での満足度を計測する有効なアンケートの構築と継続的なデータ収集が必要であると考える。

2．現物市場におけるオプション取引の意義

まず、オプション取引の経済的、社会的意義を考えてみたい。その際にオプションの売り手、買い手双方にとって意義があることを考える。連続時間におけるオプション価値評価式である Black=Sholes 式そのものから、オプションの経済的、社会的意義を考察することは難しいので、本稿では、オプション取引をやや平易に、１期間２時点モデルでコールオプションの価値を Arrow-Debreu 証券をもとに考察する。

現時点と将来の１期間２時点モデルケースにおけるペイオフ（図１）を考え、オプションの買い手、売り手それぞれについて、現在の所有資産 y_0、将来時点の２つの状態における収入（income） y_1, y_2 によって構成される効用関数を想定する

・　任意の買い手 i の効用関数：$U_i^{Buyer}(y_0^{Buyer}, y_1^{Buyer}, y_2^{Buyer})$.

・　任意の売り手 j の効用関数：$U_j^{Seller}(y_0^{Seller}, y_1^{Seller}, y_2^{Seller})$

：添え字の数字 0 は現在、１，２は将来時点の状態１、状態２を意味する。
また、買い手と売り手が想定する状態生起確率を買い手が $\pi_1^{Buyer(i)}$、$\pi_2^{Buyer(i)}$、売り手が $\pi_1^{Seller(j)}$、$\pi_2^{Seller(j)}$ であるとする。
これをもとに、それぞれの効用関数が最大になる際のオプション、現物それぞれの現在価値を導出できる[4]。

図１　１期間２時点モデルでのペイオフ

	現在	将来	
		状態１ (State 1)	状態２ (State 2)
株　式	S_0	S_1	S_2
コール･オプション	C_0	$S_1 - K$	0
リスクフリー資産	$\frac{1}{1+r_f}$	1	1

注）S_1：将来の状態１の時の株価、S_2：将来の状態２の時の株価

C_0：コールオプションの現在価値、K：行使価格、r_f：リスクフリーレート

[4] 式の展開は本稿の後半に添付する。

〔買い手の場合〕

①現物価格

$$S_0^{Buyer(i)} = \pi_1^{Buyer(i)} \times \frac{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_1^{Buyer(i)}}}{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}}} \times S_1 + \pi_2^{Buyer(i)} \times \frac{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_2^{Buyer(i)}}}{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}}} \times S_2 \quad \cdot\cdot\cdot (1)$$

②コールオプション価格

$$C_0^{Buyer(i)} = \pi_1^{Buyer(i)} \times \frac{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_1^{Buyer}}}{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}}} \times (S_1 - K) \quad \cdot\cdot\cdot (2)$$

③リスクフリー資産

$$\frac{1}{1+r_f} = \pi_1^{Buyer(i)} \times \frac{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_1^{Buyer(i)}}}{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}}} + \pi_2^{Buyer(i)} \times \frac{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_2^{Buyer(i)}}}{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}}} \quad \cdot\cdot\cdot (3)$$

〔売り手の場合〕

$$S_0^{Seller(j)} = \pi_1^{Seller(j)} \times \frac{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_1^{Seller(j)}}}{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_0^{Seller(j)}}} \times S_1 + \pi_2^{Seller(j)} \times \frac{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_2^{Seller(j)}}}{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_0^{Seller(j)}}} \times S_1 \quad \cdot\cdot\cdot (4)$$

$$C_0^{Seller(j)} = \pi_1^{Seller(j)} \times \frac{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_1^{Seller(j)}}}{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_0^{Seller(j)}}} \times (S_1 - K) \quad \cdot\cdot\cdot (5)$$

$$\frac{1}{1+r_f}=\pi_1^{Seller(j)}\times\frac{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_1^{Seller(j)}}}{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_0^{Seller(j)}}}+\pi_2^{Seller(j)}\times\frac{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_2^{Seller(j)}}}{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_0^{Seller(j)}}} \qquad ・・・(6)$$

すべての買い手と売り手について、下記の条件が満たされるときに、コールオプション価格、現物価格、リスクフリーレートは一致する。

$$\pi_1^{Buyer(i)}\times\frac{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_1^{Buyer}}}{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}}}=\pi_1^{Seller(j)}\times\frac{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_1^{Seller(j)}}}{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_0^{Seller(j)}}}=P_1 \qquad ・・・(7)$$

$$\pi_2^{Buyer(i)}\times\frac{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_2^{Buyer(i)}}}{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}}}=\pi_2^{Seller(j)}\times\frac{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_2^{Seller(j)}}}{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_0^{Seller(j)}}}=P_2 \qquad ・・・(8)$$

それぞれを、P_1、P_2と置くと、売り手と買い手で現物、コールオプション価格が一致するということは、同じ Arrow-Debreu 証券の価格を持つことに他ならない（後節を参照)。このときに売り手も買い手も効用関数が最適な状態にあることから、

Arrow-Debreu 価格（P_1、P_2）でコールオプションと現物価格が決まる際には、パレート最適が達成されていることになる。すなわち、現物市場に対してオプション市場が存在することは、オプションの買い手も売り手にとっても望ましいと結論できる。図１で、将来時点に状態２を想定すれば、現在、プレミアムを確保することが望ましいと考えて売り手になるのが望ましく、将来時点で状態１を想定するときには、買い手になることが望ましい、そのような状態想定がことなる市場参加者が存在することによって、売りと買いが成立し均衡プレミアムが定まる。

すなわち、（9）式から(11)式でP_1、P_2を消去することによって、コールオプションの均衡時のプレミアム(12)式を導出することができる。

$$S_0=P_1\times S_1+P_2\times S_2 \qquad ・・・(9)$$

$$C_0 = P_1 \times (S_1 - K) \qquad \cdot\cdot\cdot (10)$$

$$\frac{1}{1+r_f} = P_1 \times 1 + P_2 \times 1 \qquad \cdot\cdot\cdot (11)$$

$$C_0 = \frac{S_0(1+r_f) - S_2}{(S_1 - S_2)(1+r_f)} \times (S_1 - K) \qquad \cdot\cdot\cdot (12)$$

図 1 のケースで、将来の状態それぞれについて、現在保有する資産総額がリスクフリー程度のリターンしか得られないというヘッジポートフォリオを前提とした場合にも現物とコールオプションの現在価値を導出できる[5]。これは(12)式の結果に一致する。この導出方法では、市場参加者の効用関数が前提となっていないが、ヘッジポートフォリオの前提条件は、パレート最適をもたらす均衡価格に落ち着くことがわかる。これまで、コールオプションのプレミアムについて考えてきたが、プットオプションについても同様の導出方法で、均衡プレミアムを導くことができる。(12)式は Black-Sholes 式のように複雑ではないことから、オプションプレミアムの経済的な意味を考察するには分かりやすい[6]。

下式のように(12)式の権利行使価格を現在の株価S_0とすると、現在の満足度を上回る場合に権利を行使し、そうでなければ権利を行使しないケースと考えることができる。これは、後述するような金融以外の分野でオプション価値の考察する際に便利である。

$$C_0 = \frac{S_0(1+r_f) - S_2}{(S_1 - S_2)(1+r_f)} \times (S_1 - S_0) \qquad \cdot\cdot\cdot (13)$$

株価とは異なり、満足度の計測はなかなか難しいが、仮に、時系列的に体系的な個々人の生活の質に関わる様々な分野での満足度が計測されるとすれば、その分野ごとにオプション価値を考えることができる。今後、個々人の生活の質を高めるためには、このようなデータ計測が必要になると考えられる。特に、「個」の時代における公共サービスのあり方を考える際のヒントになるのではないだろうか。

[5] w：株式の保有比率　　$1-w$：コールオプションの保有比率

状態１：　$[w \times S_0 + (1-w) \times C_0] \times (1+r_f) = w \times S_1 + (1-w) \times (S_1 - K)$　・・(A)

状態２：　$[w \times S_0 + (1-w) \times C_0] \times (1+r_f) = w \times S_2$　・・(B)

（A）と（B）式から（12）式と同じ結果が導かれる。

[6] 例えば、行使価格が上昇するとプレミアムの現在価値が低下すること、権利行使価格から状態１で想定される株価の差である$S_1 - K$が高くなるほどプレミアムが高かくなることがわかる。金利の変化の影響も考察できる。

3．社会生活における条件付請求権の考察

前節でみたようなコールオプションのペイオフのアナロジーとして、個々人の社会生活における満足度について考えてみたい。(13)式の株価を個々人の生活における満足度と考えてみる。現在の社会生活の満足度S_0を将来の社会生活満足度S_1が上回る際に権利が行使されるオプションを考える[7]。このような社会生活の満足度を高めるような公共サービス市場が条件付請求権市場であれば、公共財の非競合性、非排除性といった市場の失敗の原因となる要因が緩和される可能性が出てくるだろう。公共サービスの受け手はプレミアムを支払い、そのプレミアムが市場で決まるからである。

このようなケースでは、オプションの権利の売り手は、社会生活の満足度が低下することを想定することになる。権利の売り手も社会生活を営んでいるので、社会通念上、このような状態を想定することは無いと考えられる。また、限りなく将来の満足度が現在の満足度を上回る際に、一個人や企業がこのような権利の売り手になることは考えにくい[8]。社会生活の満足度が高まることを前提にこのような権利の売り手になりえるのは、公共サービスを提供者する国や地方自治体ということになる。

個々人の社会生活の満足度が社会的便益を高めることによって改善すると考えると、公共サービスの提供者は、そのサービスの受け手となる個々人の社会的便益が将来、現在の個々人の生活における満足度水準を上回るようなオプションを提供できることが望ましいと考えられる。個々人が、このようなオプションを購入するために支出する点が、無料で提供される公共財とは異なる。非排除性の問題が無いからである。社会的便益を提供する公共機関がこのようなオプションを国民や地域住民に提供できれば、そのような公共サービス市場がパレート最適に近づくと推論できる。このようなオプションが株式のような金融市場のものではないという意味でリアルオプションの一つと考えるならば、公共サービス市場がパレート最適になる条件の一つが、このような社会的便益の価値に関するリアルオプションが個々人に提供されることであると考えられる。

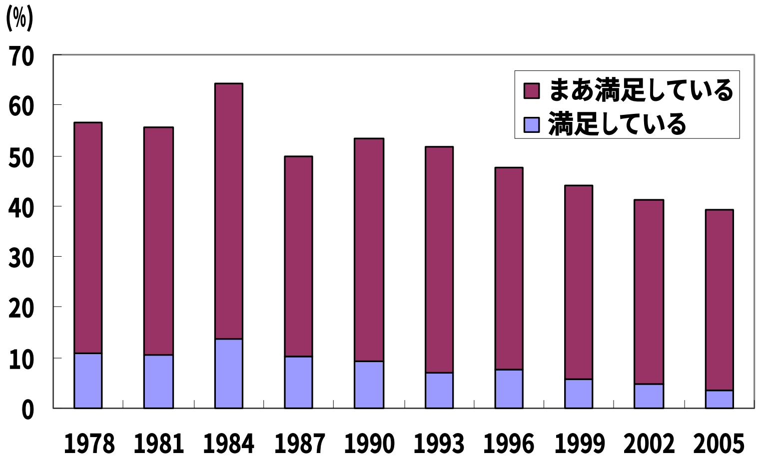
公益のサービス形態の一つである PFI（Private Finance Initiative）は公益機関にない民間のノウハウを利用し、安価な公益サービスを提供できるしくみとして注目されている。PFI では、民間によるコンソーシアム（企業連合）による公益ビジネス展開を考える上で、その中心となる SPC（特定目的会社）が設置される。公益サービスは民間主導となり、個々人は、そのサービスの対価を支払う必要がある。これは、租税によってまかなわれる対価不要のサービスとは異なるのである。公共サービス提供方法としての PFI は、従来の公共財よりも非排除性について問題がないという面で、より望ましい提供形態であると考えられるが[9]、サービス利用者が支払うサービスの対価をオプシ

[7] 金融商品のオプションではないという意味では、リアルオプションの一つと考えてみたい。
[8] 環境問題については、環境に関する満足度が現在より改善することを企業が目指し、その権利を社会全体が得ると考えた場合、コスト負担としての企業の環境問題への取組に対して、なんらかのプレミアムを社会が負担することが望ましいと考えられる。
[9] 大阪証券取引所には独立採算型の PFI 事業者のための専門の上場市場が 2000 年２月から開設されているが、その利用者は今のところないという状況をみても自治体抜きの独立採算型の難しさがあると考えられる。

ョンプレミアム決定プロセスの中で考えることができれば､公益サービスの提供がよりパレート最適なものに近づくのではないだろうか。

３年毎に内閣府が実施している国民生活選好度調査によれば､生活全般の満足度は低下傾向が顕著となっている（図２)。今後、公共サービス市場が条件付請求権市場の形態に近づくことが､生活満足度の改善につながるのではないかだろうか。公共サービス市場がパレート最適な状態に近づくことが期待できるからである。

図 2　生活全般の満足度の推移



（｢国民生活選好度調査｣ 内閣府）

4.おわりに

理論的には、条件付請求権市場において、市場参加者である権利の買い手、売り手のいずれにとっても満足のゆく状況で権利価格が決定される。このような条件付権市場のアナロジーとして公共サービス市場を考察すると、現在、そのような市場が存在しているわけではないが､公共サービスの提供者である自治体と公共サービスの受け手である個人の間で、将来の状態に基づく社会的便益の価値（社会的便益－社会的費用）を享受できる権利の価格が条件付請求権市場的なプロセスで決まることが望ましいと考えられる。公共サービスによって個々人の生活の質を高め、生活全般の満足度を高めるためには、公共サービス市場参加者の他の誰かが効用を悪化させない限り、どの人の効用も改善することができない状態に持ってゆけるような施策が求められるからである。個々人の公共サービスに対する体系的な満足度の計測に基づいて､公共サービス料金をオプションのプレミアムとして考察することが有効ではないだろうか。その意味でも､今後､個々人の生活の質に関わる満足度の体系的な計測が欠かせないと考える。

【ご参考】

図 1 のような 1 期間 2 時点モデルを想定した場合のオプションの買い手と売り手の効用関数の最適化とそれによって得られる現物株とコールオプションの現在価値の導出プロセスは以下の通りである。

①オプションの買い手

$y_0^{Buyer(i)}$：買い手（Buyer）の現在の保有資産、$y_1^{Buyer(i)}$、$y_2^{Buyer(i)}$：買い手の将来時点の各状態における所得（income）は下記のように表せる。
それぞれの状態が生起する確率を $\pi_1^{Buyer(i)}$（状態１）$\pi_2^{Buyer(i)}$（状態２）とする。

$$y_0^{Buyer(i)} = w_0 - S_0^{Buyer(i)} \times Z_1^{Buyer(i)_i} - C_0^{Buyer(i)} \times Z_2^{Buyer(i)} - \frac{Z_3^{Buyer(i)}}{1+r_f}$$

$$y_1^{Buyer(i)} = \pi_1^{Buyer(i)} \times S_1 \times Z_1^{Buyer(i)} + \pi_1^{Buyer(i)} \times (S_1 - K) \times Z_2^{Buyer(i)} + \pi_1^{Buyer(i)} \times Z_3^{Buyer(i)}$$

$$y_2^{Buyer(i)} = \pi_2^{Buyer(i)} \times S_2 \times Z_1^{Buyer(i)} + \pi_2^{Buyer(i)} \times Z_3^{Buyer(i)}$$

以上の変数によってオプションの買い手の効用関数を下記のように表すと

$$U_i^{Buyer}(y_0^{Buyer(i)}, y_1^{Buyer(i)}, y_2^{Buyer(i)})$$

効用最適化の条件は下記の通り。

$$\Delta U_i^{Buyer} = \frac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}} \times \Delta y_0^B + \frac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_1^{Buyer(i)}} \times \Delta y_1^B + \frac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_2^{Buyer(i)}} \times \Delta y_2^{Buyer(i)}$$

＝0

$$\Delta y_0^{Buyer(i)} = -S_0 \times \Delta Z_1^{Buyer(i)} - C_0^{Buyer(i)} \times \Delta Z_2^{Buyer(i)} - \frac{\Delta Z_3^{Buyer(i)}}{1+r_f}$$

$$\Delta y_1^{Buyer(i)} = \pi_1^{Buyer(i)} \times S_1 \times \Delta Z_1^{Buyer(i)} + \pi_1^{Buyer(i)} \times (S_1 - K) \times \Delta Z_2^{Buyer(i)} + \pi_1^{Buyer(i)} \times \Delta Z_3^{Buyer(i)}$$

$$\Delta y_2^{Buyer(i)} = \pi_2^{Buyer(i)} \times S_2 \times \Delta Z_1^{Buyer(i)} + \pi_2^{Buyer(i)} \times \Delta Z_3^{Buyer(i)}$$

$$\Delta U_i^{Buyer} = \frac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}} \times \left[-S_0 \times \Delta Z_1^{Buyer(i)} - C_0 \times \Delta Z_2^{Buyer(i)} - \frac{\Delta Z_3^{Buyer(i)}}{1+r_f} \right]$$

$$+ \frac{\partial U_i^{Buyer(i)}}{\partial y_1^{Buyer(i)}} \times \left[\pi_1^{Buyer(i)} \times S_1 \times \Delta Z_1^{Buyer(i)} + \pi_1^{Buyer(i)} \times (S_1 - K) \times \Delta Z_2^{Buyer(i)} + \pi_1^{Buyer(i)} \times \Delta Z_3^{Buyer(i)} \right]$$

$$+ \frac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_2^{Buyer(i)}} \times \left[\pi_2^{Buyer(i)} \times S_2 \times \Delta Z_1^{Buyer(i)} + \pi_2^{Buyer(i)} \times \Delta Z_3^{Buyer(i)} \right]$$

$$= \left[-\frac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}} \times S_0 + \pi_1^{Buyer(i)} \times \frac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_1^{Buyer(i)}} \times S_1 + \pi_2^{Buyer(i)} \times \frac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_2^{Buyer(i)}} \times S_2 \right] \times \Delta Z_1^{Buyer(i)}$$

$$+ \left[-\frac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}} \times C_0 + \pi_1^{Buyer(i)} \times \frac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_1^{Buyer(i)}} \times (S_1 - K) \right] \times \Delta Z_2^{Buyer(i)}$$

$$+ \left[-\frac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}} \times \frac{1}{1+r_f} + \pi_1^{Buyer(i)} \times \frac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_1^{Buyer(i)}} + \pi_2^{Buyer(i)} \times \frac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_2^{Buyer(i)}} \right] \times \Delta Z_3^{Buyer(i)}$$

$$= 0$$

この条件から、現物株、コールオプションの現在価値は以下のように表せる。

$$S_0^{Buyer(i)} = \pi_1^{Buyer(i)} \times \frac{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_1^{Buyer(i)}}}{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}}} \times S_1 + \pi_2^{Buyer(i)} \times \frac{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_2^{Buyer(i)}}}{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}}} \times S_2$$

$$C_0^{Buyer(i)} = \pi_1^{Buyer(i)} \times \frac{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_1^{Buyer}}}{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}}} \times (S_1 - K)$$

$$\frac{1}{1+r_f}=\pi_1^{Buyer(i)}\times\frac{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_1^{Buyer(i)}}}{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}}}+\pi_2^{Buyer(i)}\times\frac{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_2^{Buyer(i)}}}{\dfrac{\partial U_i^{Buyer}}{\partial y_0^{Buyer(i)}}}$$

②オプションの売り手

$y_0^{Seller(j)}$：売り手（Seller）現在の保有資産、$y_1^{Seller(j)}$、$y_2^{Seller(j)}$：売り手の将来時点の各状態における所得（income）は下記のように表せる。（現時点の$y_0^{Seller(j)}$で、オプションプレミアムを得ている）。
それぞれの状態が生起する確率を$\pi_1^{Seller(j)}$（状態１）、$\pi_2^{Seller(j)}$（状態 2）とする。

$$y_0^{Seller(j)}=w_0-S_0^{Seller(j)}\times Z_1^{Seller_i(j)}+C_0^{Seller(j)}\times Z_2^{S}-\frac{Z_3^{Seller(j)}}{1+r_f}$$

$$y_1^{Seller(j)}=\pi_1^{Seller(j)}\times S_1^{Seller(j)}\times Z_1^{Sellerl(j)}-\pi_1^{Seller(j)}\times(S_1-K)\times Z_2^{Sellerl(j)}+\pi_1^{Seller(j)}\times Z_3^{Seller(j)}$$

$$y_2^{Seller(j)}=\pi_2^{Seller(j)}\times S_2\times Z_1^{Seller(j)}+\pi_2^{Seller(j)}\times Z_3^{Seller(j)}$$

以上の変数によってオプションの買い手の効用関数を下記のように表すと

$$U_j^{Seller}(y_0^{Seller(j)},y_1^{Seller(j)},y_2^{Seller(j)})$$

効用最適化の条件は下記の通り。

$$\Delta U_j^{Seller}=\frac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_0^{Seller(j)}}\times\left[-S_0\times\Delta Z_1^{Seller(j)}+C_0\times\Delta Z_2^{Seller(j)}-\frac{\Delta Z_3^{Seller(j)}}{1+r_f}\right]$$

$$+\frac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_1^{Seller(j)}}\times\left[\pi_1^{Seller(j)}\times S_1\times\Delta Z_1^{Seller(j)}-\pi_1^{Seller(j)}\times(S_1-K)\times\Delta Z_2^{Seller(j)}+\pi_1^{Seller(j)}\times\Delta Z_3^{Seller(j)}\right]$$

$$+\frac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_2^{Seller(j)}}\times\left[\pi_2^{Seller(j)}\times S_2\times\Delta Z_1^{Seller(j)}+\pi_2^{Seller(j)}\times\Delta Z_3^{Seller(j)}\right]$$

$$=\left[-\frac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_0^{Seller(j)}}\times S_0^{Seller(j)}+\pi_1^{Seller(j)}\times\frac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_1^{Seller(j)}}\times S_1+\pi_2^{Seller(j)}\times\frac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_2^{Seller(j)}}\times S_2\right]\times\Delta Z_1^{Seller(j)}$$

$$+\left[C_0^{Seller(j)} \times \frac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_0^{Seller(j)}} - \frac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_1^{Seller(j)}} \times \pi_1^{Seller(j)} \times (S_1 - K)\right] \times \Delta Z_2^{Seller(j)}$$

$$+\left[-\frac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_0^{Seller(j)}} \times \frac{1}{1+r_f} + \pi_1^{Seller(j)} \times \frac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_1^{Seller(j)}} + \pi_2^{Seller(j)} \times \frac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_2^{Seller(j)}}\right] \times \Delta Z_3^{Seller(j)}$$

$$= 0$$

以上の条件から、現物株、コールオプションの現在価値は下記のように表せる。

$$C_0^{Seller(j)} = \pi_1^{Seller(j)} \times \frac{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_1^{Seller(j)}}}{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_0^{Seller(j)}}} \times (S_1 - K)$$

$$S_0^{Seller(j)} = \pi_1^{Seller(j)} \times \frac{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_1^{Seller(j)}}}{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_0^{Seller(j)}}} \times S_1 + \pi_2^{Seller(j)} \times \frac{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_2^{Seller(j)}}}{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_0^{Seller(j)}}} \times S_1$$

$$\frac{1}{1+r_f} = \pi_1^{Seller(j)} \times \frac{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_1^{Seller(j)}}}{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_0^{Seller(j)}}} + \pi_2^{Seller(j)} \times \frac{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_2^{Seller(j)}}}{\dfrac{\partial U_j^{Seller}}{\partial y_0^{Seller(j)}}}$$

③Arrow-Debreu 証券

下図のように、将来においてある『状態』が発生したときに、１単位の財の引渡しを要求することができる権利を考える。

図３　１期間２時点モデルにおける Arrow-Debreu 証券のペイオフ

	現在	将　来	
		状態1 (State 1)	状態2 (State 2)
Arrow-Debreu証券	p_1	1	0
	p_2	0	1
リスクフリー資産	$\frac{1}{1+r_f}$	1	1

注） p_1 ：将来の状態１にペイオフ１単位の現在価格、 p_2 ：将来の状態 2 にペイオフ１単位の現在価格、 r_f ：リスクフリーレート

y_0 ：現在の保有資産、 y_1、 y_1 ：将来時点の各状態における所得（income）は下記のように表せる。

π_1、 π_2 はそれぞれ、状態１、状態 2 が生起する確率。

$$y_0 = w_0 - p_1 \times Z_1 + p_2 \times Z_2 - \frac{Z_3}{1+r_f}$$

$$y_1 = \pi_1 \times 1 \times Z_1 + \pi_1 \times Z_3$$

$$y_2 = \pi_2 \times 1 \times Z_2 + \pi_2 \times Z_3$$

以上の変数によってオプションの買い手の効用関数を下記のように表すと

$U(y_0, y_1, y_2)$

効用最適化の条件は以下の通り。

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial y_0} \times \Delta y_0 + \frac{\partial U}{\partial y_1} \times \Delta y_1 + \frac{\partial U}{\partial y_2} \times \Delta y_2$$

=0

以上の条件より、

$$\Delta y_0 = -p_1 \times \Delta Z_1 - p_2 \times \Delta Z_2 - \frac{\Delta Z_3}{1+r_f}$$

$$\Delta y_1 = \pi_1 \times \Delta Z_1 + \pi_1 \times \Delta Z_3$$

$$\Delta y_2 = \pi_2 \times \Delta Z_2 + \pi_2 \times \Delta Z_3$$

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial y_0} \times \left[-p_1 \times \Delta Z_1 - p_2 \times \Delta Z_2 - \frac{\Delta Z_3}{1+r_f} \right] + \frac{\partial U}{\partial y_1} \times \left[\pi_1 \times \Delta Z_1 + \pi_1 \Delta Z_3 \right] + \frac{\partial U}{\partial y_2} \times \left[\pi_2 \times \Delta Z_2 + \pi_2 \times \Delta Z_3 \right]$$

$$= \left[-p_1 \times \frac{\partial U}{\partial y_0} + \pi_1 \times \frac{\partial U}{\partial y_1} \right] \times \Delta Z_1 + \left[-p_2 \times \frac{\partial U}{\partial y_1} + \pi_2 \times \frac{\partial U}{\partial y_2} \right] \times \Delta Z_2$$

$$+ \left[-\frac{1}{1+r_f} \times \frac{\partial U}{\partial y_0} + \pi_1 \times \frac{\partial U}{\partial y_1} + \pi_2 \times \frac{\partial U}{\partial y_2} \right] \times \Delta Z_3$$

＝0

上記の条件から、図３の p_1、 p_2 は以下のように表せる。

$$p_1 = \pi_1 \times \frac{\frac{\partial U}{\partial y_1}}{\frac{\partial U}{\partial y_0}} \qquad ・・・〔1〕$$

$$p_2 = \pi_2 \times \frac{\frac{\partial U}{\partial y_2}}{\frac{\partial U}{\partial y_0}} \qquad ・・・〔2〕$$

$$\pi_1 \times \frac{\frac{\partial U}{\partial y_1}}{\frac{\partial U}{\partial y_0}} + \pi_2 \times \frac{\frac{\partial U}{\partial y_2}}{\frac{\partial U}{\partial y_0}} = \frac{1}{1+r_f} \qquad ・・・〔3〕$$

第 2 節の（7）（8）式の P_1、P_2、がそれぞれ、上記の p_1、p_2 に一致する場合に、複数の売り手と買い手の株価とオプションプレミアムが一致することになる。このときにオプションの買い手も売り手も効用が最大化されていることになりパレート最適な状態にあるということができる。このような将来の状態対応した条件付請求権はパレート最適となる仕組みを提供すると考えることができる。

参考文献

前田章　「資産市場の経済理論」　東洋経済新報社　2003 年
池田昌幸「金融経済の基礎」　朝倉書店　2000 年
津野義道「ファイナンスの数学的基礎一離散モデル」　共立出版　1999 年
津野義道「ファイナンス数理入門」　共立出版　2003 年
川又邦雄「市場機構と経済厚生」　創文社現代経済学選書５　1996 年
緒方・須賀・三浦　「公共経済学」　勁草書房　2006 年　勁草書房
野口悠紀雄　藤井眞理子　「金融工学」　ダイヤモンド社　2005 年
野口悠紀雄　藤井眞理子　「現代ファイナンス理論」　東洋経済新報社　2005 年

Frank Milne（1995）,“Finance Theory and Asset Pricing,” *Oxford University Press*
Jurgen Eichberger and Ian R.Harper (2003), “Financial Economics” *Oxford University Press*
William H.Beaver George Parker(1995) “Risk Management Problems& Solutions” McGrowHill
Jean Jacques Laffont(1986), "The Economics of Uncertainty and Information"The MIT Press
Hal R. Varian (1992) “Microeconomic Analysis 3rd Edition” Norton
Yvan Lenguiler(2004) “Microfoudations of Financial Economics” Princeton University Press