

\*\*\* 論 文 \*\*\*

## Modified Value at Risk を用いたポートフォリオ運用

～ボラティリティからテールリスクの評価へ～

投資工学研究所 佐久間 洋明

### 要 約

資産運用の世界では、平均・分散モデルがアセットアロケーションの決定等に活用されて以来、資産のリターンは正規分布に従うという仮定を置き、資産やポートフォリオのリスク指標としてボラティリティが広く用いられてきた。しかし、多くの先行研究において、テールリスク（発生頻度（確率）は非常に小さいが、発生すると多大な損失をもたらすリスク）は、正規分布を仮定した場合よりも、実際には高い確率で発生していることが指摘されている。このテールリスクを評価する指標として、Value at Risk（以降 VaR とする）が広く用いられている。しかし、一般的に VaR を推計する手法として、正規分布を仮定する分散共分散法が用いられている。そのため、例えばリターンの分布が負の歪度や正の相対尖度を持つ場合には、VaR を過小評価する恐れがある。

本稿では、上記の問題点に対処する方法として、VaR を分布の歪度と尖度を用いて調整したリスク指標である Modified Value at Risk（以降 MVaR とする）を使い、分析を行った。具体的には、リスク指標として MVaR を用いたポートフォリオを構築し、リスク指標としてボラティリティや分散共分散法による VaR を用いたポートフォリオと比較して、どのような特徴を持つか検証を行った。

その結果、MVaR を用いて構築したポートフォリオは、ボラティリティや分散共分散法による VaR を用いて構築したポートフォリオと比較し、ダウンサイドリスクが小さくなることが確認された。

## 目次

1. はじめに
2. MVaR とは
3. リスク指標の異なるポートフォリオの比較
  - 3.1 使用データ
  - 3.2 ポートフォリオの構築方法
  - 3.3 検証結果
4. まとめ

### 1. はじめに

資産運用の世界では、平均・分散モデルがアセットアロケーションの決定等に活用されて以来、資産のリターンは正規分布に従うという仮定を置き、資産やポートフォリオのリスク指標としてボラティリティが広く用いられてきた。しかし、多くの先行研究において、実際には、資産やポートフォリオのリターンの分布は正規分布に従わないことが指摘されている。例えば、リーマンブラザーズが破綻した翌月の2008年10月を見ると、正規分布では考えられないような大きな負のリターンが頻繁に発生している。

図表1は、1980年1月～2012年12月末までの日興株式パフォーマンスインデックスの日次リターンを標準化（Z値）し、2008年10月のデータの中からZ値が-5以下の値を抜き出し、昇順にソートしたものである。

図表1 2008年10月の日次リターンとZ値<sup>1</sup>

順位	日付	リターン (%)	Z 値
1	2008/10/16	-9.22	-7.95
2	2008/10/8	-8.06	-6.95
3	2008/10/24	-7.22	-6.23
4	2008/10/27	-7.10	-6.13
5	2008/10/10	-6.88	-5.93
6	2008/10/22	-6.71	-5.79

(出所) 各種データより NFI が作成

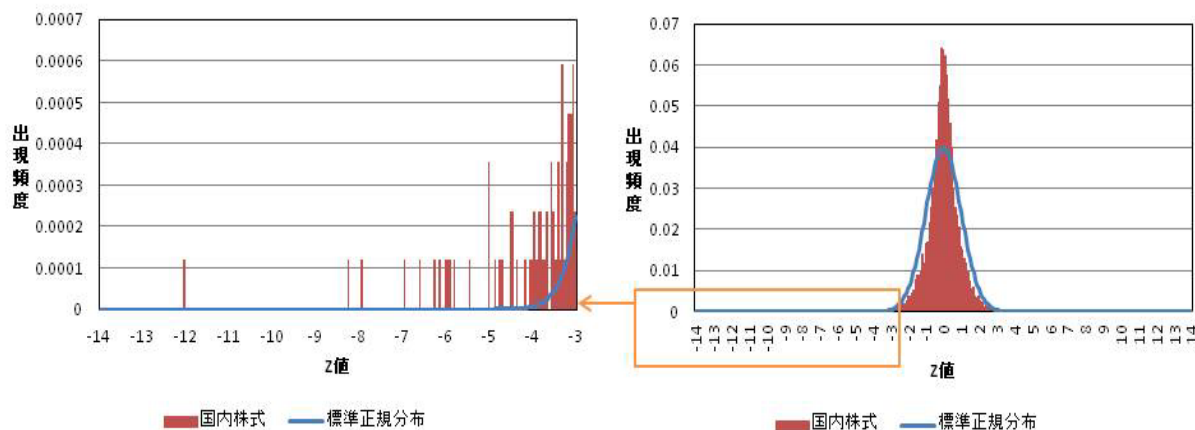
図表1を見ると、Z値が-5以下の日が6日もある。正規分布を仮定すると、Z値が-5以下の事象が起こる確率は約0.000028%であり、1年を250営業日とすると約14,000年に1度しか起こらない計算となる。このように、テールリスク（発生頻度（確率）は非常に小さいが、発生すると多大な損失をもたらすリスク）は、正規分布が仮定するよりも、実際には高い確率で発生していることが確認できる。

次に、同じ期間のデータを用いて、国内株式の日次リターンの出現頻度と正規分布を仮定した場合の出現頻度について確認する。

図表2は、1980年1月から2012年12月末までの日興株式パフォーマンスインデックスの日次リターンのZ値の出現頻度と、標準正規分布を仮定した場合のZ値の出現頻度を示している。右図はリターンの分布の全体像、左図はオレンジ色で囲まれた部分の拡大図である。

<sup>1</sup> Z値は、リターンの分布として、ある平均・標準偏差を持つ正規分布を仮定した時に、リターンの実現値と平均値の差を標準偏差で割ったものである（リターンの実現値が平均より低い場合は、Z値はマイナスの値をとる）。

図表2 国内株式の日次リターンの出現頻度と標準正規分布の出現頻度の比較



(出所) 各種データより NFI が作成

図表2を見ると、国内株式は正規分布を仮定した場合と比較して、Z値が0近辺のリターンの出現頻度が高く、また極端に低いリターンの出現頻度も高いことが確認できる。実際に国内株式のリターンの分布は、正規分布と異なる形状を示していることが分かる。また、正規分布を仮定した場合と実際の国内株式を比較すると、Z値が-5以下となる事象の起こる確率は、前者が0.000028%、後者が0.142%となり、後者の方が頻繁に発生していることが分かる。

次に、歪度と尖度を用いて統計的に分布の形状を確認する。正規分布と比較して、一般的に相対尖度（尖度-3と定義される）が正の値の場合は分布の両裾が厚くなり、歪度が負の値の場合は分布の左の裾が厚くなると言われている。そこで、伝統的な4資産である国内債券、国内株式、外国債券、外国株式及び4資産の等ウェイトポートフォリオの月次リターンの分布の歪度、尖度を確認する。アセットアロケーションにおいては、一般的に月次リターンを用いるため、これ以降の分析では月次リターンを使用する。

図表3は、1980年1月から2012年12月末までの各資産及び4資産の等ウェイトポートフォリオ<sup>2</sup>の月次リターンより求めた統計量である。

<sup>2</sup> 等ウェイトポートフォリオを分析対象に加えた理由は、個別資産のリターンが正規分布に従わない場合でも、ポートフォリオのリターンの分布は正規分布に従う可能性があるためである。

図表3 各資産及び等ウェイトポートフォリオの統計量

	国内債券	国内株式	外国債券	外国株式	等ウェイト ポートフォリオ
歪度	-0.23	-0.16	-0.46	-0.82	-0.77
相対尖度	9.41	1.20	1.95	2.40	2.20
JB 検定統計量	1464.60**	25.27**	76.84**	139.52**	119.12**

(出所) 各種データより NFI が作成

\*\*は正規性が有意水準 1%で棄却されることを意味する。

図表3を見ると、各資産及び4資産の等ウェイトポートフォリオの歪度と相対尖度は、正規分布と異なる値を示している。さらに、歪度と尖度を用いる正規性の適合度検定である Jarque-Bera 検定（以降 JB 検定とする）を行うと、すべての資産及び等ウェイトポートフォリオの正規性は有意水準 1%で棄却される（有意水準 1%の信頼係数は 9.210 である）。

以上、図表 1、2、3 より、リスク指標としてボラティリティを用いて資産やポートフォリオを評価する際、そのリターンの分布が正規分布に従わない場合には（特に負の歪度を持つ場合）、極端に低いリターンが想定以上に発生する可能性があるため、テールリスクに着目した資産配分を行う必要があることが分かる。

テールリスクに注目したリスク指標として Value at Risk（以降 VaR とする）が広く使われている。三浦（2004）によると VaR は、「ある証券またはポートフォリオをある一定の期間保有するときに、ある一定の確率で発生する最大損失額」と定義されている。しかし、一般的に VaR を推計する手法として、正規分布を仮定する分散共分散法が用いられている。そのため、例えばリターンの分布が負の歪度や正の相対尖度を持つ場合には、VaR を過小評価する恐れがある。この問題点に対処する方法として、VaR を分布の歪度と尖度を用いて調整した Modified Value at Risk<sup>3</sup>（以降 MVaR とする）が、広く知られている。

そこで本稿では、リスク指標として MVaR を用いたポートフォリオを構築し、リスク指標としてボラティリティや分散共分散法による VaR を用いたポートフォリオと比較して、MVaR を用いたポートフォリオがどのような特徴を持つか検証する。以降、

<sup>3</sup> MVaR については Frave, L. and J.-A. Galeano(2002)を参照。

第2章ではMVaRについて説明し、第3章では各ポートフォリオを比較し、第4章をまとめとする。

## 2. MVaR とは

MVaR とは VaR を分布の歪度と尖度を用いて調整したリスク指標である。三浦(2004)によると VaR は、「ある証券またはポートフォリオをある一定の期間保有するときに、ある一定の確率で発生する最大損失額」と定義されている。リターンの分布が正規分布に従うと仮定する分散共分散法による VaR は以下の式で表される<sup>4</sup>。

$$\text{VaR} = -W_0(\mu + Z_c\sigma) \quad (1)$$

$W_0$  : 期初のポートフォリオの評価額  
 $Z_c$  : 信頼係数  
 $\mu$  : 期待リターン  
 $\sigma$  : ボラティリティ

式(1)では、リターンの分布が正規分布に従うと仮定しているため、正規分布に従わない場合、VaR はリスク量を正しく表すことができない可能性がある。この問題点に対処する方法として、VaR を分布の歪度と尖度を用いて調整したリスク指標である MVaR が広く知られている。MVaR は以下の式で表される。

$$\text{MVaR} = -W_0(\mu + Z_{cf}\sigma) \quad (2)$$

$Z_{cf}$  : 調整済み信頼係数

また、調整済み信頼係数 $Z_{cf}$ は以下の式で表される。

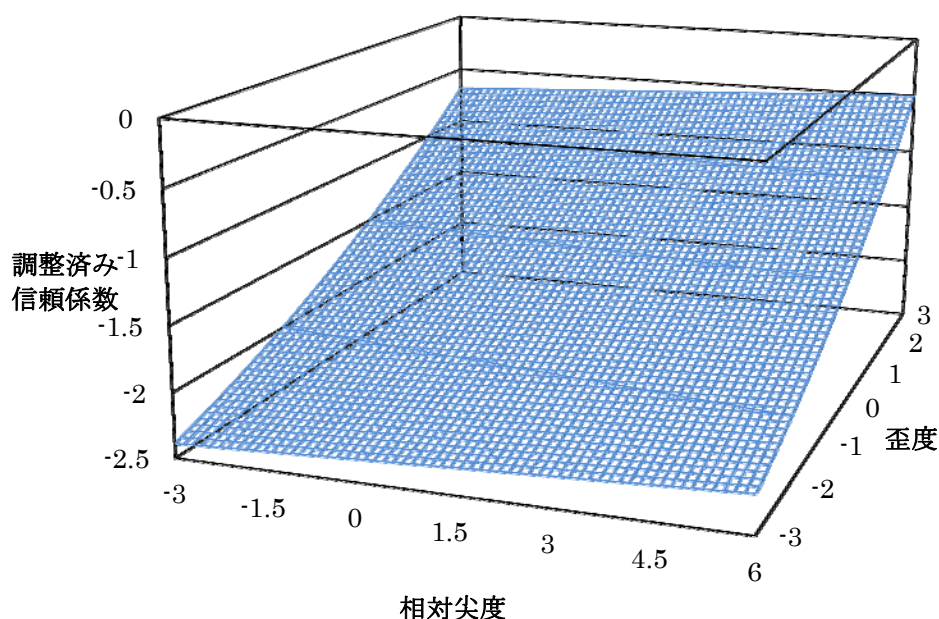
$$Z_{cf} = Z_c + \frac{1}{6}(Z_c^2 - 1)S + \frac{1}{24}(Z_c^3 - 3Z_c)K - \frac{1}{36}(2Z_c^3 - 5Z_c)S^2 \quad (3)$$

$S$  : 歪度  
 $K$  : 相対尖度

<sup>4</sup> VaR を推計する手法としては、資産のリターンが正規分布に従うと仮定する分散共分散法が用いられることが多い。そのため、以下本稿では、「分散共分散法による VaR」のことを、単に「VaR」と略記することとする。

図表 4 は、歪度と尖度が調整済み信頼係数 $Z_{cf}$ に、どのような影響を与えるのかを示した図である。これは、信頼係数 $Z_c$ を $-1.645$  で一定とし、歪度と尖度の変化により調整済み信頼係数 $Z_{cf}$ が、どのような値を取るのかを表している。

図表 4 歪度、相対尖度と調整済み信頼係数 $Z_{cf}$ の関係



(出所) 各種データより NFI が作成

図表 4 を見ると、調整済み信頼係数 $Z_{cf}$ は尖度の変化よりも歪度の変化に対してよりセンシティブであることが確認できる。また、特に歪度が負のときに調整済み信頼係数 $Z_{cf}$ は小さな値となることが分かる。

次に、信頼水準によって  $MVaR$  と  $VaR$  に違いが出るか否かを確認するため、想定保有期間を 1 年として各信頼水準の  $MVaR$  と  $VaR$  の値を計算する<sup>5</sup>。計算を行う際に、ポートフォリオのリターンの分布特性は図表 5 の数値とし、計算結果は図表 6 に示す。

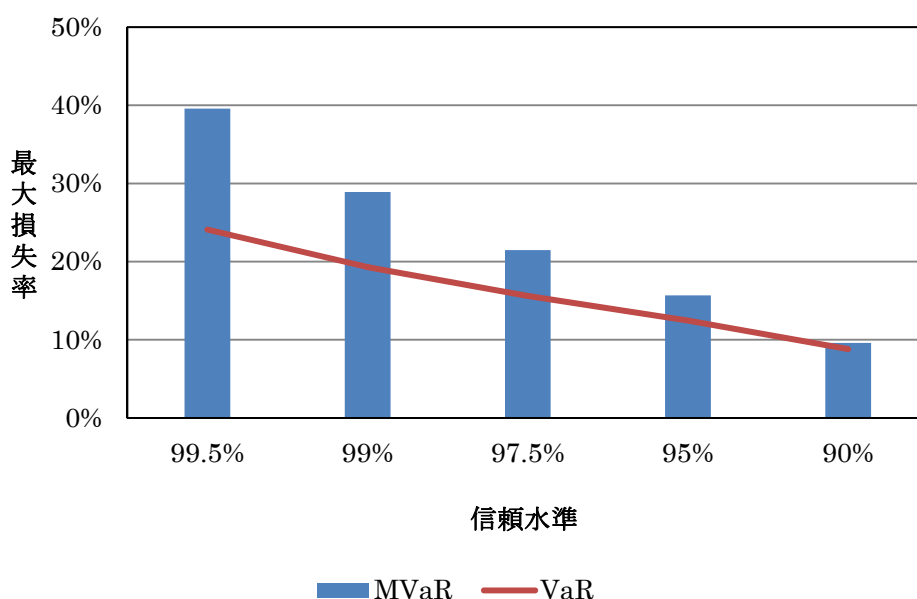
<sup>5</sup>  $VaR$  や  $MVaR$  を求めるとき、保有期間が短期である場合は、期待リターンを 0 として計算することもあるが、本稿では想定保有期間を 1 年としているため期待リターンを考慮した  $VaR$  や  $MVaR$  を用いる。以降、本稿においては、同様に算出することとする。

図表 5 各指標の数値

期待リターン	ボラティリティ	歪度	相対尖度
4%	10%	-1.5	3

(出所) 各種データより NFI が作成

図表 6 各信頼水準による MVaR と VaR の関係



(出所) 各種データより NFI が作成

図表 6 より、信頼水準が高いほど MVaR と VaR の差が大きくなり、歪度と尖度の影響が顕著に表れることが確認できる。

図表 4、5、6 より、特にリターンの分布が負の歪度を持つ場合、MVaR と比較して VaR はリスク量を過小評価する可能性があることが分かる。

### 3. リスク指標の異なるポートフォリオの比較

本章では、伝統的な 4 資産である国内債券、国内株式、外国債券、外国株式を用い



て、リスク指標に **MVaR** を用いたポートフォリオとリスク指標にボラティリティや **VaR** を用いたポートフォリオを比較し、検証を行う。なお、リスク指標にボラティリティを用いたポートフォリオとして、最小分散ポートフォリオを採用する。その理由は、リスク指標の違いが選択されるポートフォリオの特徴にどのような影響を与えるか、確認するためである。

### 3.1 使用データ

今回の検証では、1982年12月から2012年12月までの月次リターンを使用する。検証に使用する4資産のインデックスは、国内債券、国内株式、外国債券、外国株式の順に、日興債券パフォーマンスインデックス（総合）、日興株式パフォーマンスインデックス（総合）、シティグループ世界国債インデックス（除く日本、円建て）、MSCI世界株式インデックス（除く日本、円建て）である。また、期待リターンについては日興シャープ・モデルの期待リターンを用いる。日興シャープ・モデルは、CAPMに基づく均衡モデルを用いて期待リターンを推計するモデルである。

### 3.2 ポートフォリオの構築方法

本稿では、リスク指標として **MVaR** を用いたポートフォリオの特徴を確認するため、リスク指標として **MVaR**、**VaR** 及びボラティリティを用いたポートフォリオを構築し、検証を行う。各ポートフォリオは毎年12月末にリバランスを行うこととし、対象期間は1992年12月末から2012年12月末までとする。

リスク指標として **MVaR** を用いたポートフォリオ（以降 **MVaR** ポートフォリオとする）は、各リバランス時点において、過去120カ月のヒストリカルデータを用い、各資産のウェイトが非負かつ各資産のウェイトの合計が1となる制約を課した上で、片側信頼水準95%で式(2)により算出されるリスクが最小になるように最適化を行い、ウェイトを算出する。

リスク指標として **VaR** を用いたポートフォリオ（以降 **VaR** ポートフォリオとする）は、まず各リバランス時点において、過去120カ月のヒストリカルデータを用い、各

資産のウェイトが非負かつ各資産のウェイトの合計が 1 となる制約を課した上で、片側信頼水準 95%で式(1)により算出されるリスクが最小となるように最適化を行い、ウェイトを算出する。

リスク指標としてボラティリティを用いたポートフォリオ(以降最小分散ポートフォリオとする)は、まず各リバランス時点において、過去 120 カ月のヒストリカルデータを用い、各資産のウェイトが非負かつ各資産のウェイトの合計が 1 となる制約を課した上で、ポートフォリオのボラティリティが最小となるように最適化を行い、ウェイトを算出する。

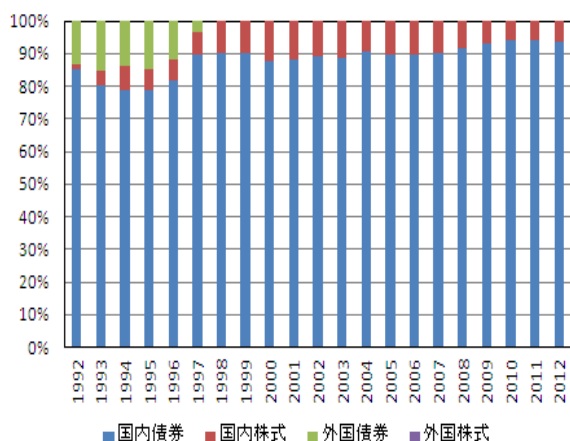
このように、本稿の検証におけるポートフォリオ構築では、リスク指標のみに着目した最適化を行っており、通常行われている期待リターンとリスクの両方を考慮した最適化によるポートフォリオ構築とは異なる。これは、リスク指標の違いが選択されるポートフォリオの特徴にどのような影響を与えるかを確認するためである。一方、実務上で MVaR の手法を適用してポートフォリオを構築する際には、個々の投資家の置かれている個々の状況に応じて、期待リターンとリスクの両方を考慮した最適化を行う必要があると考えられる。

### 3.3 検証結果

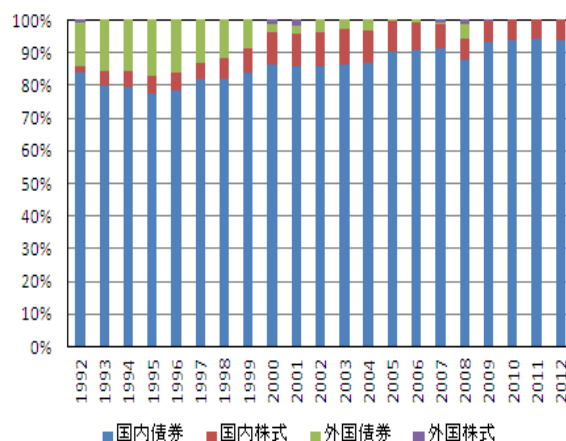
図表7は、各年12月末における各ポートフォリオの資産配分を示している。

図表7 各ポートフォリオの資産配分

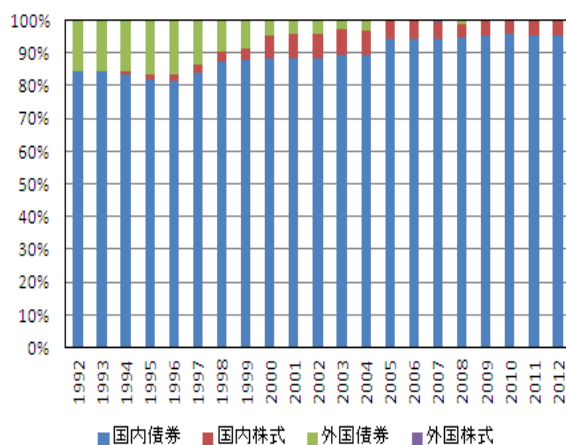
MVaR ポートフォリオ



VaR ポートフォリオ



最小分散ポートフォリオ



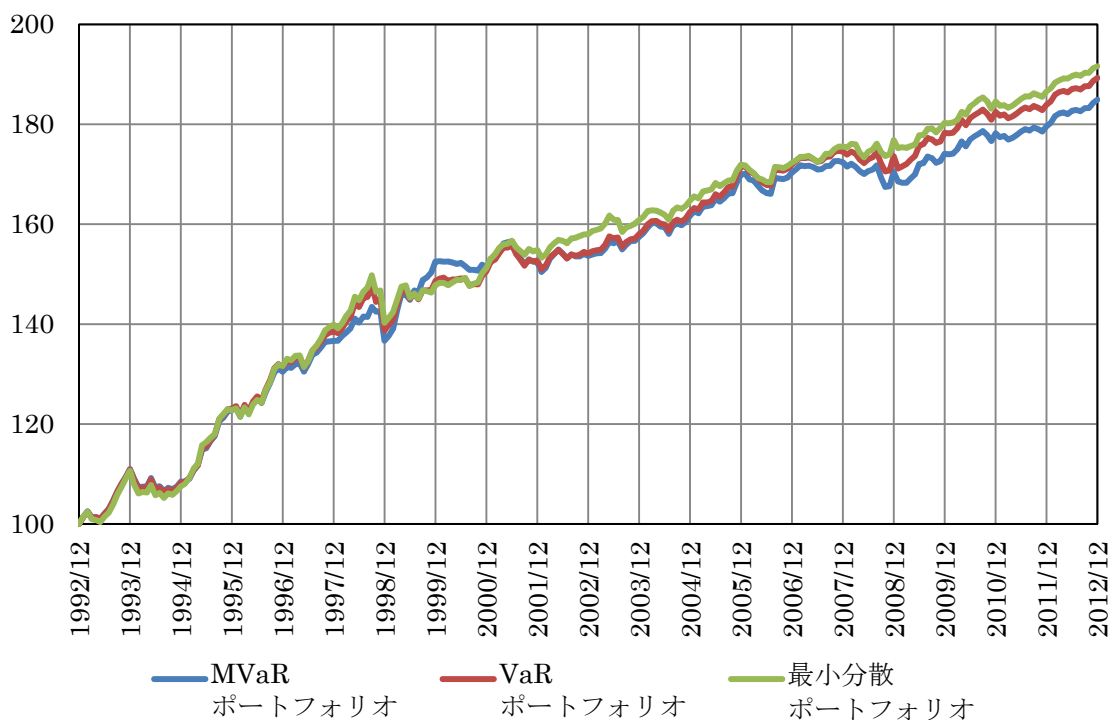
(出所) 各種データより NFI が作成

図表7を見ると、各ポートフォリオの資産配分は国内債券に集中している。3つのポートフォリオの特徴は、MVaRポートフォリオは国内株式、最小分散ポートフォリオは国内債券、VaRポートフォリオは外国債券が僅かに多いという違いはあるものの、大きな違いは見られない。

次に、各ポートフォリオのパフォーマンスを確認する。

図表8は1992年12月末を100とした各ポートフォリオの累積インデックスを示しており、図表9は各ポートフォリオのパフォーマンス指標である。

図表8 各ポートフォリオの累積インデックス



(出所) 各種データより NFI が作成

図表 9 各ポートフォリオのパフォーマンス指標

	MVaR ポートフォリオ	VaR ポートフォリオ	最小分散 ポートフォリオ
リターン	3.09%	3.21%	3.28%
リスク	2.80%	2.87%	2.91%
リスク・リターン比	1.10	1.12	1.13
最大ドローダウン	-4.73%	-6.04%	-6.35%
月次最大損失率	-4.14%	-4.40%	-4.41%
歪度	-0.40	-0.70	-0.74
相対尖度	3.77	4.37	4.83
JB 検定統計量	148.41**	210.64**	255.66**

(出所) 各種データより NFI が作成

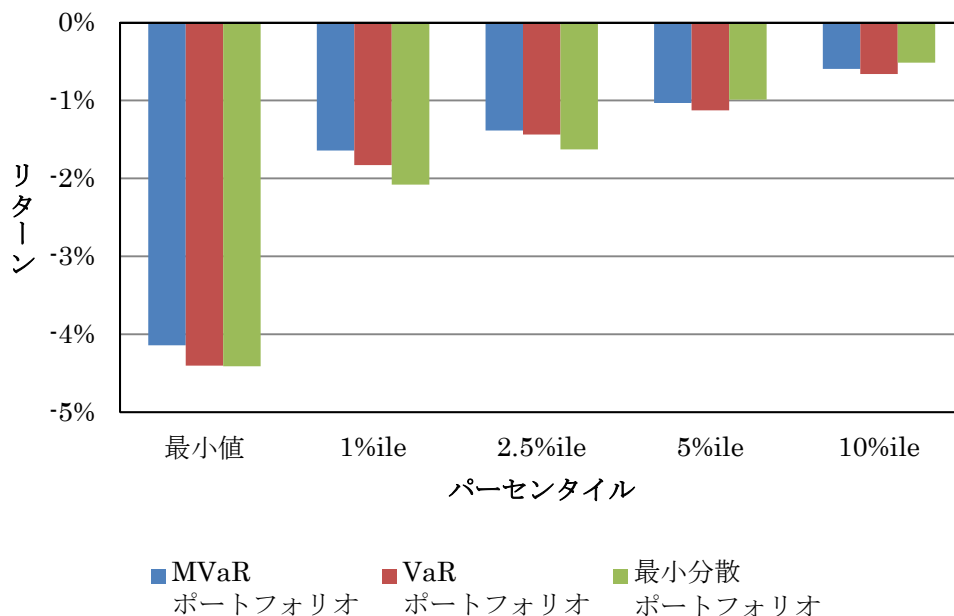
\*\*は正規性が有意水準 1%で棄却されることを意味する。

図表 9 を見ると、MVaR ポートフォリオは他のポートフォリオと比較して、最大ドローダウン、月次最大損失率などのダウンサイドリスクは小さいことが確認できる。JB 検定の結果を見ると、すべてのポートフォリオは有意水準 1%において正規性を棄却される。ただし、MVaR ポートフォリオの歪度や尖度は、他のポートフォリオよりも、正規分布に近い値を示すことが分かる。リターン、リスク、リスク・リターン比について見ると、MVaR と他のポートフォリオとの間に、統計的に有意な差は見られなかった。

次に、各ポートフォリオにおける下位の各パーセンタイルのリターンについて確認する。

図表 10 は、各ポートフォリオの各パーセンタイルのリターンである。

図表 10 各ポートフォリオの各パーセンタイルのリターン



(出所) 各種データより NFI が作成

図表 10 を見ると、2.5%ile 以下では、MVaR ポートフォリオは他のポートフォリオと比較して、損失が一番小さいことを確認できる。

今回検証を行ったポートフォリオはそれぞれのリスク指標を最小化したポートフォリオである。図表 7、8、9、10 より、リスク指標としてボラティリティや VaR を用いたポートフォリオと比較して、リスク指標として MVaR を用いたポートフォリオは最大ドローダウンや月次最大損失率を低く抑えることが確認できる。また、リターンの分布の歪度と尖度は共に、正規分布の歪度と尖度により近い値となることを確認できる。

#### 4. まとめ

本稿では、VaR を歪度と尖度を用いて調整したリスク指標である MVaR により構築したポートフォリオと、リスク指標として分散共分散法による VaR やボラティリティにより構築したポートフォリオを比較し、MVaR ポートフォリオのパフォーマンス特性について検証を行った。

MVaR ポートフォリオは、他のポートフォリオと比較して最大ドローダウン、月次最大損失率などのダウンサイドリスクが小さくなる特徴が確認された。また、歪度と尖度もその他のポートフォリオと比較して、共に正規分布に近い値になるため、よりダウンサイドリスクを抑えることができると考えられる。

しかし、MVaR を実際のアセットアロケーションの決定などに活用するためには、同じ資産のウェイトであっても期待リターンが異なれば MVaR の水準が変化してしまう点や、リターンの歪度や尖度の推計が難しいという点が、課題として挙げられる。このように克服すべき課題は存在するものの、ボラティリティだけではなく MVaR のようなテールリスクを評価する指標にも注目する投資家は、今後増加するものと思われる。

#### 参考文献

- [1] 三浦良造(2004), 『リスクマネジメント』, 共立出版
- [2] Frave, L. and J.-A. Galeano(2002), “Mean –modified Value-at-Risk optimization With Hedge Funds,” *Journal of Alternative Investment*, 5, 2-21.
- [3] Huisman, R., K. Koedijk, and R. Pownall(1999), “Asset allocation in a VaR framework,” Erasmus University Rotterdam, Working Paper.